La durée de l'examen est 2h00. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Barème indicatif : ex. 1 (4pts), ex. 2 (4 pts), ex. 3 (3 pts), ex. 4 (3 pts), ex. 5 (9 pts).

Exercice 1.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathcal{D}$, l'intégrale généralisée

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^\alpha(1+t)}dt$$

a. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des valeurs de α pour lesquelles l'intégrale est convergente.

b. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathcal{D}$, on a $I_n(\alpha) = (-1)^n I_n(1-\alpha)$.
(on pourra considérer le changement de variable $x = 1/t$).

c. En déduire la valeur de $I_{2n+1}(1/2)$.

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = n\exp(-nx)$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum_n u_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

b. Montrer, pour tout $a > 0$, que cette série converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

c. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\sum_{n\geq 0} \exp(-nx) = \frac{1}{1-\exp(-x)}$$

et en déduire que

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) = \frac{\exp(-x)}{(1-\exp(-x))^2}.$$

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel réel et N_1 et N_2 deux normes équivalentes définies sur E.

a. Rappeler la définition de normes équivalentes.

b. Montrer que si U est un ouvert de (E, N_1) alors U est aussi un ouvert de (E, N_2).

c. Montrer que si $\phi : (E, N_1) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est une application continue alors $\phi : (E, N_2) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est aussi une application continue.

Exercice 4.

a. Montrer que l'application ϕ définie sur l'espace vectoriel réel des fonctions $C^1([0,1])$ par

$$\phi(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$$

est une norme.

b. Montrer que cette norme n'est pas équivalente à la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

c. Soit g une fonction continue sur $[0,1]$.
Sous quelles conditions sur la fonction g l'application $\phi_g : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_g(f) = g(0)|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|g(t)dt$$

est-elle une norme équivalente à la norme ϕ ?

Exercice 5.

Soit l'application $\phi : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que ϕ est une application continue.

b. En déduire que son graphe G est un ensemble fermé.
(le graphe est défini par $G = \{(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$)

c. Montrer que ϕ est continûment différentiable (C^1) et calculer son gradient en $x = (x_1, x_2)$.

d. On considère p éléments de $\mathbb{R}^2$: $a_1, \ldots, a_p$ qui sont fixés. Soit la fonction $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{p} \phi(x - a_k),$$

où $x - a_k = (x_1 - a_{k1}, x_2 - a_{k2})$, pour $k = 1, 2, ..., p$.
Montrer que ψ est une application C^1.

e. Montrer que le barycentre des points $a_1, \ldots, a_p$, défini par $\bar{a} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} a_k$, est un point critique de ψ. Calculer la matrice Hessienne et en déduire qu'il s'agit d'un minimum local.

f. Montrer qu'il s'agit en fait du minimum global.

g. On considère maintenant l'application
$\beta : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \beta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in \mathbb{R}$.
Montrer que β est une application continue. Calculer son gradient.
L'application β est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Sur quel ouvert est-elle C^1 ?

h. Montrer que, pour $M \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, l'ensemble

$$A_M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{k=1}^{p} \beta(x - a_k) \leq M \right\}$$

est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^2$ et en déduire qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p} \beta(x^* - a_k) \leq \sum_{k=1}^{p} \beta(x - a_k),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
A votre avis $\bar{a}$ et x^* sont-ils égaux en général ?