La durée du partiel est 2h00. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

a. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

$$\int_1^{+\infty} \sin t \, dt, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(\cos(t))}{(t^2+1)\sqrt{|t|}} dt, \quad \int_0^{+\infty} t^{18} \exp(-18t) \, dt$$

b. Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{\alpha/2}} dt, \ \alpha \in \mathbb{R}$.
Calculer cette intégrale lorsqu'elle est convergente (IPP, avec $f(t) = \ln(t)$).

c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \frac{\cos(1/t)}{t^2(2+\sin(1/t))} dt$ est convergente.
Puis, calculer cette intégrale avec un changement de variable ($\varphi(t) = \sin(1/t)$).

Exercice 2

Rappeler la définition d'intégrale semi-convergente.
Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\cos t + t} \, dt$ est semi-convergente.

Exercice 3

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2 x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.
a) Etudier la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
b) Montrer que la convergence n'est pas uniforme.
c) Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. En déduire par un nouvel argument que la convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme.
d) Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 4

Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.
a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$, pour $x \in]0, +\infty[$.
b) Montrer que la fonction S est continue sur $]0, +\infty[$.
c) Sur quel(s) intervalle(s) $I \subset]0, +\infty[$ la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est-elle normale ?
d) Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
e) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis qu'elle est de classe C^∞.
f*) Montrer que

$$2S(x) + 1 = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$$

et en déduire que $\frac{1}{2^x} - 1 \leq 1 + 2S(x) \leq 0$, pour tout $x > 0$.
Calculer $\lim_{x\to 0_+} S(x)$.