La durée du partiel est 2h00. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1.

1. Donner un exemple de fonction f telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ diverge mais $\int_0^\infty f^2(t)dt$ converge.

2. Donner un exemple de fonction f telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge mais $\int_0^\infty f^2(t)dt$ diverge.

3. Donner un exemple de fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et qui n'est pourtant bornée sur aucun intervalle de la forme $[M, +\infty[$ pour tout $M \in \mathbb{R}_+$.

4. Soit f une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt$ converge.

Exercice 2.

1. Etudier la convergence des intégrales suivantes

$$i) \int_0^\infty \left[\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]^2 dt, \quad ii) \int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2} dt, \quad iii) \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad iv) \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

2. Calculer l'intégrale iv). (On pourra faire une IPP).

3. Etudier, en fonction de α, la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^\alpha} dt.$$

Exercice 3.

Soit la suite (f_n) de fonctions définies, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, par $f_n(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 + x^n}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
Quelle remarque peut-on faire sur la limite f ?

2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment $[0, \alpha]$, $\alpha < 1$ et sur tout intervalle $[\beta, +\infty[$, $\beta > 1$.

3. Pourquoi n'y a-t-il pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4.

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions.

2. Etudier la convergence normale.

3. Montrer que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer f.