Chapitre 2

Intégrales généralisées (ou impropres)

Vous avez défini en S3 l'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, notée $\int_a^b f(t)dt$, comme l'aire (avec un signe positif ou négatif, selon le signe de la fonction) de la courbe représentative de la fonction à intégrer sur cet intervalle.

On souhaite dans ce chapitre donner un sens à des intégrales du type $\int_a^b f(t)dt$ lorsque la fonction f n'est plus définie sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier ou lorsqu'on souhaite calculer une intégrale sur un intervalle de longueur infinie (ce qui est fréquent en physique ou en probabilités).

On souhaite par exemple savoir si on peut donner un sens aux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$.

2.1 Définition et exemples d'intégrales impropres

On se donne un intervalle réel $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue (par morceaux).

La fonction f est continue sur $[a, x]$ pour tout $x < b$ et on peut définir la primitive $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ qui s'annule en a par

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Définition 2.1.1

L'intégrale de f sur $[a, b[$ est dite convergente (on note $\int_a^b f$ converge) si F admet une limite finie en b. Dans ce cas on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b_-} F(x).$$

De même si f est définie sur $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < \infty$, l'intégrale impropre $\int_a^b f$ est bien définie si

$$\lim_{x\to a_+} \int_x^b f(t)dt \quad \text{existe.}$$

Enfin, si f est définie sur $]a, b[$, l'intégrale de f entre a et b est dite convergente si

$$\lim_{x\to a_+, y\to b_-} \int_x^y f(t)dt \quad \text{existe.}$$

Lorsqu'on sait calculer explicitement une primitive, une première manière de vérifier qu'une intégrale impropre est convergente est donc d'examiner la limite de la primitive au "point à problème".

On peut également utiliser la définition séquentielle de la limite d'une fonction et le critère de Cauchy pour exprimer qu'une intégrale impropre est bien définie (convergente).

2.1.1 Exemples

Intégrale $\int_0^1 t^{-1/2}dt$

La fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = 1/\sqrt{t}$ est continue et pour $x \in]0,1]$,

$$F(x) = \int_x^1 t^{-1/2}dt = \left[2t^{1/2}\right]_x^1 = 2(1-\sqrt{x}).$$

La fonction $F(x)$ admet donc une limite lorsque $x \to 0$ avec $\lim_{x\to 0_+} F(x) = 2$. L'intégrale $\int_0^1 t^{-1/2}dt$ converge et vaut 2.

Intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$

La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est continue et une primitive est $\sin(t)$. Par conséquent, pour $x \geq 0$,

$$\int_0^x \cos(t)\ dt = \sin(x).$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t)\ dt$ est divergente, puisque la fonction $\sin(x)$ ne converge pas lorsque x tend vers l'infini.

Intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-t)dt$

La fonction $t \mapsto \exp(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et une primitive de $f(t) = \exp(-t)$ est $F(t) = -\exp(-t)$. On a donc

$$\int_0^x \exp(-t)dt = 1 - \exp(-x)$$

qui converge vers 1 quand $x \to +\infty$ et on a $\int_0^{+\infty} \exp(-t)dt = 1$.

Intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

La fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = 1/\sqrt{t}$ est continue et $F(x) = 2(\sqrt{x}-1)$ n'a pas de limite finie en plus l'infini. L'intégrale impropre diverge.

Intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

La fonction $f(t) = (\sqrt{1-t^2})^{-1}$ est continue sur $[0,1[$. Elle a pour primitive $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x) - \arcsin(0) = \arcsin(x)$ qui a pour limite $\pi/2$ lorsque $x \to 1_-$. L'intégrale est donc convergente et

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$

La fonction $f(t) = (\sqrt{t^2-1})^{-1}$ est continue sur $]1,2]$. La fonction $F(x) = \int_x^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \arg\cosh(2) - \arg\cosh(x)$ a pour limite $\arg\cosh(2) = \ln(2+\sqrt{3})$ lorsque $x \to 1_+$. L'intégrale est donc convergente.

Intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

Avant de traiter cet exemple, enonçons le résultat suivant. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Théorème 2.1.1

(relation de Chasles pour les intégrales impropres)
Soit f une fonction continue $[a,b[\mapsto \mathbb{R}$ et soit $c \in]a,b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.
S'il y a convergence, alors

$$\int_a^b f(t) = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

et le résultat ne dépend pas du point c choisi.

Preuve
La preuve est une conséquence directe de la relation de Chasles pour les intégrales définies. On a en effet, pour tout $c \in]a,b[$, et tout $x \in]a,b[$

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt \quad \text{intégrale de Riemann}$$

et donc l'intégrale converge $\int_a^b f(t)dt$ ssi $\lim_{x\to b} \int_c^x f(t)dt$ existe, d'où le résultat annoncé. □

Appliquons le théorème précédent avec $c = 0$ et étudions la convergence des intégrales impropres $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.
La primitive $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \pi/2$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

De même, pour $x < 0$, $G(x) = \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} G(x) = \pi/2$. Par conséquent l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut π.

Intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$

Appliquons de nouveau le théorème précédent pour vérifier l'existence de cette intégrale. On a $\int_0^x tdt = x^2/2$ et donc $\int_0^{+\infty} tdt$ diverge.

Attention, on a pourtant bien $\int_{-x}^{+x} tdt = 0$ mais ceci n'assure pas la convergence d'une intégrale généralisée : la convergence doit avoir lieu pour toutes les suites (y_n) et (x_n) qui tendent vers a et b.

Intégrale $\int_{-1}^{+1} t^{-1}dt$

La fonction $f : t \mapsto t^{-1}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Etudions séparément les deux intégrales impropres $\int_{-1}^0 t^{-1}dt$ et $\int_0^{+1} t^{-1}dt$.

Pour la première intégrale impropre, une primitive est $F(x) = \int_{-1}^x t^{-1}dt = \ln|x|$. On a $\lim_{x\to 0} F(x) = -\infty$. Par conséquent l'intégrale diverge même si un raisonnement trop rapide aurait pu nous faire penser qu'elle valait 0.

2.2 Calcul des intégrales impropres

Nous énonçons les propriétés suivantes qui montrent que les intégrales impropres (convergentes) possèdent les mêmes propriétés de linéarité, d'additivité et de croissance que les intégrales de Riemann.

Propriété 2.2.1

Linéarité. *Si f et g ont des intégrales convergentes sur $]a,b[$ alors $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\int_a^b \alpha f+\beta g$ converge et*

$$\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g.$$

Croissance. *Si f est positive sur $[a,b[$ et si $\int_a^b f$ converge alors $\int_a^b f\geq 0$.*

La preuve est directe et repose sur les propriétés de linéarité et de croissance de l'intégrale de Riemann et un passage à la limite.

Les changements de variable et l'intégration par parties doivent être effectués avec précaution. On considérera toujours des intégrales de Riemann en faisant tendre "x" vers le point à problème.

Théorème 2.2.2

(changement de variables)
Soient $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ continue et $\varphi:]\alpha,\beta[\to]a,b[$, $\mathcal{C}^1$ et bijective alors

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

sont deux intégrales impropres de même nature et si elles convergent

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)|\varphi'(t)|dt$$

Preuve

La preuve est similaire à la preuve du changement de variable pour les intégrales de Riemann avec en plus un passage à la limite. Le fait que φ soit bijective permet d'assurer l'équivalence "une intégrale converge" $\iff$ "l"autre intégrale converge". La valeur absolue permet de compenser l'interversion des limites d'intégration lorsque la fonction φ est décroissante. □

Exemple de changement de variable

Calcul de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\left(1+(\ln t)^2\right)}.$$

La fonction $f(t)=\frac{1}{t\left(1+(\ln t)^2\right)}$ est continue sur $[1+\infty[$. Par comparaison avec les intégrales de Bertrand, on remarque que l'intégrale est convergente. On considère le changement de variable $x=\varphi(t)=\ln(t)$. La fonction $\varphi:[1+\infty[\to[0,+\infty[$ est C^1 et croissante, $\varphi'(t)=t^{-1}$ et on obtient donc

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\left(1+(\ln t)^2\right)}=\int_{0=\varphi(1)}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{u\to+\infty}[\arctan(u)]_0^u=\frac{\pi}{2}.$$

Une autre technique classique est l'intégration par parties (utile par exemple lorsque la fonction à intégrer est un produit de fonctions exp ou trigo et de polynômes).

Théorème 2.2.3

(intégration par parties)
Soient f et g deux fonctions C^1 sur $]a,b[$.
Si la fonction fg a des limites finies en a et en b alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

sont de même nature et si elles convergent

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_b fg - \lim_a fg - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Preuve.
La preuve est omise. Elle est similaire à la preuve de l'intégration par parties avec les intégrales de Riemann, avec en plus un passage à la limite. □

Exemple : $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

La fonction $h(x) = xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive. Effectuons une intégration par parties pour calculer cette intégrale en posant $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-x}$. On a, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^t xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^t - \int_0^t (-e^{-x})dx \\ &= -te^{-t} - (e^{-t} - 1)\end{aligned}$$

On a $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$ et $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$, l'intégrale convergente vaut donc 1.

2.3 Critères généraux de convergence d'une intégrale impropre

On ne sait pas toujours calculer (rarement en fait) explicitement la primitive de la fonction à intégrer. On pourra cependant déterminer dans bien des cas si l'intégrale considérée est convergente ou non.

2.3.1 Comparaison de fonctions positives (ou de signe constant)

Les propriétés suivantes pourront être appliquées à des **fonctions qui sont de signe constant** autour du "point à problème".

Commençons par présenter quelques intégrales de référence

Propriété 2.3.1

L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \textit{ est convergente ssi } \alpha > 1.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt \textit{ est convergente ssi } \alpha < 1.$$

Preuve
Si $\alpha = 1$, une primitive de $f(t) := t^{-1}$ est la fonction ln et les deux intégrales divergent.
Si $\alpha \neq 1$ alors

$$\begin{aligned}F(x) := \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right).\end{aligned}$$

La limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$ est finie ssi $1-\alpha < 0$ soit $\alpha > 1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} G(x) := \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(1-x^{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Or $x^{1-\alpha}$ a une limite finie quand $x \to 0$ ssi $1-\alpha > 0$, soit $\alpha < 1$. □

On retrouve ici les critères de convergence des séries de Riemann ($\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha}$) qui sont convergentes ssi $\alpha > 1$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant, qui est souvent utilisé :

Théorème 2.3.2

(théorème de comparaison)
Soient f et g deux fonctions $[a,b[\to \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in [a,b[,\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

- *Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge et*

$$0 \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

- *Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge*

Avant de faire la preuve, rappelons tout d'abord le résultat important suivant : si F est une fonction croissante de $I = [a,b[$ dans $\mathbb{R}$ et si F est majorée (c-à-d $\exists M$ tel que $\forall x \in [a,b[,\ F(x) \leq M$), alors la fonction F admet une limite finie en b.

Preuve On a par la croissance de Riemann appliquée à $g-f \geq 0$, pour $x \in [a,b[$,

$$\int_a^x (f(x)-g(x))dx \geq 0$$

et par linéarité

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt := G(x).$$

Si $\int_a^b g = M < \infty$, alors la fonction F croissante sur $[a,b[$ est majorée par M, elle admet une limite finie en b ce qui achève la preuve du premier point.

Si $\int_a^b f$ est divergente, par positivité et croissance on a $\lim_{x\to b_-} F(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to b_-} G(x) = +\infty$ et la divergence de $\int_a^b g(t)dt$. □

Exemple $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$

La fonction $f(t) = e^{-t^2}$ est positive et pour tout $t \geq 1$ on a $f(t) \leq g(t) := e^{-t}$. Comme $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est une intégrale convergente, on a par le théorème de comparaison que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ est convergente. On peut même en déduire que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt \leq 1 + \frac{1}{e}.$$

(On peut montrer par un autre type de calcul que cette intégrale vaut $\sqrt{\pi}/2$.)

Fonctions positives équivalentes

On rappelle la définition d'un **équivalent** en un point b (qui peut être l'infini) pour deux fonctions f et g

$$f \sim_b g \text{ signifie } \exists h : [a,b[\to \mathbb{R} \text{ telle que } f = hg \text{ et } \lim_{x\to b_-} h(x) = 1.$$

Propriété 2.3.3

Soient f, g deux fonctions continues de $[a, b[\to \mathbb{R}_+$ vérifiant $f \sim_b g$.
Alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Cette propriété est très utile pour montrer la convergence lorsqu'on sait trouver des équivalents simples (dont les primitives sont connues).

Preuve Le fait que $\lim_{x\to b_-} h(x) = 1$ entraine qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que $\forall x \in [c, b[,\ 1/2 \leq h(x) \leq 3/2$. Par conséquent, on a $\forall x \in [c, b[$,

$$0 \leq g(x) \leq 2f(x) \leq 3g(x)$$

On a donc avec le théorème de comparaison des fonctions positives que

$$\int_a^b f \text{ converge } \Rightarrow \int_c^b f \text{ converge } \Rightarrow \int_c^b 2f \text{ converge } \Rightarrow \int_c^b g \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b g \text{ converge}$$

ainsi que

$$\int_a^b g \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f \text{ converge.}$$

On a aussi

$$\int_a^b f \text{ diverge } \Rightarrow \int_c^b f \text{ diverge } \Rightarrow \int_c^b \frac{3}{2} g \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^b g \text{ diverge}$$

ainsi que

$$\int_a^b g \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^b f \text{ diverge.}$$

□

Exemple : $\int_0^1 \frac{\mathbf{ln}(1+t)}{t\sqrt{t(1-t)}}dt$

Nous allons montrer que cette intégrale est convergente à l'aide d'équivalents.
La fonction $f(t) = \frac{ln(1+t)}{t\sqrt{t(1-t)}}$ est continue et positive sur $]0, 1[$.
Examinons le comportement f en 0 et en 1.

En 0_+, $ln(1+t) \sim t$ et $(t\sqrt{t(1-t)})^{-1} \sim t^{-3/2}$. Par conséquent, $f(t) \sim t^{-1/2}$ en 0. Or on a vu que $\int_0^1 t^{-1/2}dt$ est convergente.

En 1_-, $f(t) \sim \frac{ln2}{\sqrt{1-t}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{t\to 1} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^t = 2$ est convergente.

Exemple : $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt$

La fonction $f(t) = \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $]0, 1]$.
Examinons le comportement f en 0.
En 0, $\sin(t) \sim t$ et $f(t) \sim t^{-1}$. L'intégrale est donc divergente.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \arctan(t^{-1})dt$

Montrer que cette intégrale est divergente à l'aide d'équivalents : à faire en TD.

Exemple : convergence $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt$

La fonction $f(t) = e^{-t}t^{-1/2}$ est positive et continue sur $[1, +\infty[$. A l'infini, elle est négligeable devant la fonction $g(t) = \exp(-t)$ dont l'intégrale $\int_1^{+\infty} \exp(-t)dt$ est convergente.

Voici maintenant un résultat important qui permet de caractériser la convergence de séries numériques et d'intégrales généralisées.

Théorème 2.3.4

(comparaison série-intégrale pour les fonctions positives)
Soit f une fonction continue et positive, $f:\ [a,b[\to \mathbb{R}_+$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de points de $[a,b[$ qui converge vers b,
L'intégrale $\int_a^b f$ est convergente ssi la série $\sum_{n\geq 1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ est convergente.

Preuve On note, pour $x\in[a,b[,\ F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Utilisons la définition séquentielle de la limite d'une fonction croissante. On considère une suite croissante $(x_n)_n$ d'éléments de $[a,b[$ qui converge vers b. Par la positivité de la fonction f sur $[a,b[$ et la croissance de la suite (x_n) on a, pour $n\geq 1$,

$$0\leq \int_a^{x_{n-1}} f(t)dt = F(x_{n-1})\leq F(x_n)=\int_a^{x_n} f(t)dt \quad \text{où on a choisi } x_0=a$$

et par la relation de Chasles **(faire un dessin)**

$$0\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = F(x_n)\leq \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt.$$

Si la série de terme général $(\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt)_n$ converge vers une limite ℓ alors $(F(x_n))$ est une suite bornée. Elle est croissante donc elle converge également. Réciproquement, si l'intégrale est convergente, alors la suite $(F(x_n))$ converge vers $\int_a^b f(t)dt$ et la première inégalité nous dit que la série de terme général $(\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt)$ est aussi convergente (série majorée et à termes positifs). □

Avec le même type de raisonnement il est par exemple immédiat de montrer que la série $\sum_{k\geq 1} k^{-1}$ est divergente en la comparant avec l'intégrale de la fonction $f\,:\,x\mapsto x^{-1}$ dont une primitive est $F(x)=\ln(x)$. On retrouve aussi directement les critères de convergence des séries de Riemann.

Attention : on sait qu'une condition nécessaire pour qu'une série numérique converge est que son terme général tende vers 0. Dans le cas des fonctions continues, la convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'implique pas que f tende vers 0 à l'infini. On peut construire des exemples simples de fonctions continues dont l'intégrale converge et qui ne tendent pas vers 0 à l'infini ($\exists M>0$ tel que $\forall u\in\mathbb{R},\exists x>u$ tel que $f(x)>M$).

On peut considérer par exemple une fonction qui sur chaque intervalle $[n,n+1]$ est nulle sauf sur un sous intervalle de largeur $2n^{-2}$ qui définit un triangle de hauteur M : la surface du triangle est donc Mn^{-2} et on montre facilement que l'intégrale converge car la série $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ est bien définie. (**faire le dessin au tableau**). Il est également possible de choisir une fonction positive et continue qui n'est pas bornée (remplacer M par nM et n^{-2} par n^{-3}) mais dont l'intégrale est convergente sur $\mathbb{R}$.

2.3.2 Critères de convergence dans le cas général

On ne suppose plus maintenant que le signe de la fonction à intégrer est constant au voisinage du point à problème.

On peut utiliser un critère général de convergence : le critère de Cauchy (qui implique que la primitive converge au point à problème). Il est utile pour démontrer qu'une intégrale impropre n'est pas convergente en raisonnant par l'absurde.

Théorème 2.3.5

(critère de Cauchy pour les intégrales indéfinies)
Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente ssi pour tout $\epsilon>0$, il existe $c\in[a,b[$ t.q. pour tous $x,y\in]c,b[$ on a $\left|\int_x^y f(t)dt\right|\leq\epsilon$.

Il suffit de remarquer que $|F(y)-F(x)|=|\int_x^y f|$.

On rappelle la définition séquentielle de la limite d'une fonction dans le cas général. La fonction $g:[a,b[\to\mathbb{R}$ admet une limite ℓ en b ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de $[a,b[$ qui converge vers b, la suite $g(u_n)$ converge vers ℓ.

Théorème 2.3.6

(Comparaison intégrales-séries dans le cas général)
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge ssi, pour toute suite (x_n) de points de $[a, b[$ qui converge vers b quand n tend vers l'infini, la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ est convergente.

Preuve
On note, pour $x \in [a, b[$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Le fait que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente signifie, par définition, que la fonction F a une limite finie notée $F(b)$, en b_-. En adoptant le point de vue séquentiel de la définition de la limite d'une fonction, cela signifie que pour tout suite $(x_n), n \geq 1$, de points de $[a, b[$ converge vers b, la suite $(F(x_n))$ converge vers une valeur finie $F(b)$. En appliquant la relation de Chasles à l'intégrale de Riemann $\int_a^{x_n} f(x)dx$, on a

$$F(x_n) = \int_0^{x_1} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \tag{2.1}$$

L'équivalence entre la convergence des deux parties de l'égalité précédente est alors immédiate. □

Ce théorème général pourra être utile pour montrer qu'une intégrale diverge en la comparant à une série divergente mais aussi à montrer qu'une série converge (et obtenir sa valeur limite) à partir du calcul d'une intégrale.

Pour montrer la divergence d'une intégrale il suffit alors d'exhiber une suite (x_n) qui converge vers b telle que la série (2.1) soit divergente.

2.4 Convergence absolue, intégrales semi-convergentes

Théorème 2.4.1

(Convergence absolue)
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue (par morceaux). Si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ est aussi convergente et

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Faisons quelques remarques avant de démontrer ce résultat

Remarque 2

- *Un résultat analogue à celui vu pour les séries au semestre précédent.*
- *On peut appliquer à $|f|$ les résultats vus pour les fonctions positives*
- *Si $\int |f|$ converge on dit que $\int_a^b f$ est* ***absolument*** *convergente.*
- *Il existe des intégrales convergentes qui ne sont pas absolument convergentes (voir l'exemple $\int_1^{+\infty} t^{-1} \sin(t)dt$ traité plus tard). Ces intégrales sont appelées* ***semi-convergentes***

Preuve
Décomposons la fonction f en sa partie positive et sa partie négative (**faire un dessin**) :

$$f = f_+ - f_-$$

avec $f_+ = \sup(f, 0)$ et $f_- = \sup(-f, 0)$. Les deux fonctions f_+ et f_- sont positives et pour $x \in [a, b[$,

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

D'après le théorème de comparaison des fonctions positives appliqué à $0 \le f_- \le |f|$ et $0 \le f_+ \le |f|$, on a

$$\int_a^b |f| \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f_- \quad \text{et} \quad \int_a^b f_+ \quad \text{convergent vers } \alpha \text{ et } \beta.$$

En écrivant, pour $x \in [a, b[$,

$$F(x) = \int_a^x |f(x)|dx = \int_a^x f_+(x)dx + \int_a^x f_-(x)dx$$

Par conséquent la limite suivante existe et on a

$$\lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b} \int_a^x f_+(t)dt + \lim_{x\to b} \int_a^x f_+(t)dt = \alpha + \beta.$$

Enfin, comme $\alpha \ge 0$ et $\beta \ge 0$,

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)dt\right| &= |\alpha - \beta| \le \alpha + \beta \\ &\le \int_a^b |f(t)|dt. \end{aligned}$$

□

Exemple $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ (intégrale de Dirichlet)

Montrons qu'il s'agit d'une intégrale semi-convergente. La fonction $h(t) = \sin(t)/t$ (appelée sinus cardinal, voir Figure 2.1) est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0, $\sin(t) \sim t$ et donc $h(t) \sim 1$ et l'intégrale $\int_0^1 h(t)dt$ est convergente. Considérons maintenant, pour $x \ge 1$,

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

et effectuons une intégration par parties. On pose $g'(t) = \sin t$ et $f(t) = t^{-1}$, et on obtient

$$F(x) = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x (-\cos t)\frac{-1}{t^2} dt$$

On a clairement $|t^{-2}\cos t| \le t^{-2}$ et donc l'intégrale à droite est absolument convergente donc convergente. Par ailleurs la limite $\lim_{x\to\infty} \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x$ existe et est finie. L'intégrale est donc convergente.

Montrons maintenant qu'elle n'est pas absolument convergente en utilisant le théorème de comparaison série-intégrale pour les fonctions positives. Exhibons pour cela une suite (x_n) telle que la suite $\int_1^{x_n} |\sin t|/t dt$ diverge. Sur chaque intervalle $[(n-1)\pi, n\pi]$ on a (on pose $x_n = n\pi$) (FAIRE UN DESSIN)

$$\frac{|\sin t|}{t} \ge \frac{|\sin t|}{n\pi} \quad \text{d'où} \quad \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \ge \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sin t \; dt = \frac{2}{n\pi}$$

car la fonction $|\sin(t)|/t \ge |\sin t|/(n\pi)$ sur $[(n-1)\pi, n\pi]$ et $|\sin(t)|$ est π-périodique. Ainsi,

$$\int_1^{x_n} \frac{|\sin t|}{t} dt \ge \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{qui est une série divergente.}$$

L'intégrale n'est donc pas absolument convergente et elle est semi-convergente.

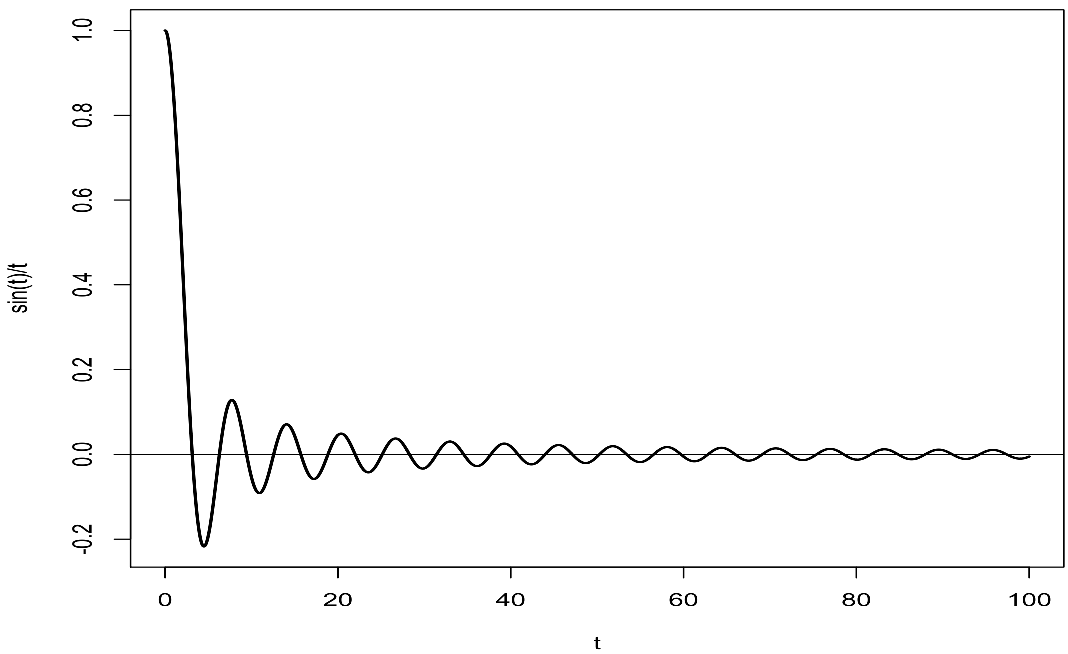

FIGURE 2.1 – Fonction sinus cardinal