Contrôle Continu de Statistique Inférentielle

Durée : 2h00.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : estimation d'une "cote"

On considère des expériences indépendantes où deux valeurs sont possibles : {`échec, succès`}. On note p la probabilité de `succès` à chaque expérience (la valeur de p est supposée fixe d'une expérience à l'autre). On souhaite estimer la quantité $c = p/(1-p)$ à partir de l'observation du résultat de n expériences.

1. Quelle est la signification de c ? (on pourra considérer 2 valeurs possibles de c : $c = 4$ et $c = 1/2$).
2. Décrire le modèle statistique et proposer un estimateur convergent de p.
3. Construire un intervalle de confiance asymptotique $1-\alpha$ pour p.
4. En remarquant que la fonction $x \to \frac{x}{1-x}$ est continue et strictement monotone sur $[0,1[$ en déduire un intervalle de confiance $1-\alpha$ pour c.
5. Proposer un estimateur convergent de c. Calculer sa loi asymptotique et construire un intervalle de confiance asymptotique $1-\alpha$.
6. **Application numérique** : on a effectué $n = 100$ expériences et on a observé 37 succès. Donner une estimation de c ainsi que les deux intervalles de confiance construits dans les question précédentes (avec une confiance asymptotique $1-\alpha = 0.95$).
7. Quelle réponse donneriez vous à l'objection suivante :
   ≪ *Ce discours est ridicule. L'expérimentateur a trouvé que le nombre moyen de succès est 37%. Ceci n'a rien d'aléatoire, il s'agit seulement d'un nombre. L'auteur de cette analyse est un charlatan !* ≫

Quelques valeurs qui pourront être utiles

- **Quantiles d'une loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$
  $q_{0.95} = 1.650$ $\quad q_{0.975} = 1.960$ $\quad q_{0.995} = 2.576$

- **Quantiles d'une loi de Student**
  99 ddl : $q_{0.95} = 1.660$ $\quad q_{0.975} = 1.984$ $\quad q_{0.995} = 2.626$

Exercice 2 : Estimation des paramètres de la loi Gamma

La loi Gamma est une loi de probabilité qui dépend de 2 paramètres, $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. Sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$f(x;\alpha,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

où la fonction $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, vérifie $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Cette famille de lois de probabilités est "flexible" et est souvent utilisée pour modéliser des variables aléatoires positives.
Si une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètres α et λ alors (il n'est pas demandé de montrer ces résultats)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

On notera (sans chercher à les calculer) $\Gamma'(x)$ la dérivée première et $\Gamma''(x)$ la dérivée seconde de Γ.

On dispose d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ issu de n réalisations indépendantes d'une loi Gamma.

1. Proposer, à l'aide de la méthode des moments, des estimateurs de α et λ.
2. Expliquer pourquoi ces estimateurs, notés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\lambda}$, convergent en probabilité vers α et λ.
3. Ecrire la vraisemblance de l'échantillon et les équations du score.
4. Calculer l'information de Fisher et donner la loi asymptotique de l'estimateur (on supposera, sans le démontrer, que les conditions de régularité pour la convergence en loi des estimateurs du maximum de vraisemblance sont vérifiées).
5. On suppose maintenant que la valeur de λ est connue, $\lambda = \lambda_0$. Calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance de α. Calculer son risque quadratique. S'agit-il d'un estimateur efficace ?