La durée du partiel est 2h00. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit $u_n : x \mapsto x(1-x)^n$ définie sur $[0,1]$.
1) Démontrer que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2) Notons $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.
a) Etudier la convergence simple sur $[0,1]$ de cette série de fonctions et calculer $S(x)$, $\forall x \in [0,1]$.
b) Montrer que la convergence de cette série de fonctions n'est pas uniforme sur $[0,1]$. Indication : calculer la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ et étudier la convergence de S_n vers S.
c) Sur quelles parties de $[0,1]$ la convergence de $S_n(x)$ est-elle uniforme ?

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$. On considère les deux normes suivantes

$$N_1(f) = \int_0^1 \mid f(t) \mid dt, \quad N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$$

1) Montrer que $id : (E, N_2) \mapsto (E, N_1)$ est continue (utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
2) Avec la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, montrer que $id : (E, N_1) \mapsto (E, N_2)$ n'est pas continue.

Exercice 3

On note

$$f_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt \qquad f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

1) Montrer que f est définie pour tout $x \in [0, +\infty[$.
2) En utilisant le changement de variable $t = n\pi + u$, montrer que

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-xn\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + n\pi} e^{-xu} du.$$

3) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est divergente pour tout $x < 0$.
4) Que peut-on dire sur la convergence de l'intégrale définissant $f(x)$ pour $x < 0$? Argumenter.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé, dont la norme est notée $\| \ \|$. Soit $A \subset E$, on pose

$$d_A : E \mapsto \mathbb{R}^+ \ \ d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

1) Montrer que d_A est une application 1-Lipschitz (on utilisera l'inégalité triangulaire de la norme).
2) Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.
3) Soient A,B deux sous-ensembles fermés de E. On note

$$O_A = \{x \in E, \ d_A(x) < d_B(x)\}, \quad O_B = \{x \in E, \ d_A(x) > d_B(x)\}.$$

Montrer que O_A et O_B sont des ouverts disjoints.
4) Montrer que si A et B sont disjoints, alors $A \subset O_A$ et $B \subset O_B$.