La durée du contrôle terminal est 2h00. Le seul document autorisé est le formulaire de statistique. L'utilisation d'une calculatrice scientifique est autorisée si elle est non programmable. L'usage des téléphones portables est interdit.

Question de cours (6 pts)

Rappeler la définition d'hypothèse statistique et la démarche générale d'un test d'hypothèses, en précisant les différents risques d'erreur.

Illustrez la démarche sur un test portant sur l'espérance μ d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de variance σ^2 connue construit à partir d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$.

Exercice 1 (8 pts)

On souhaite étudier la distribution des montants d'une catégorie de sinistres d'une compagnie d'assurance. On considère pour cela un modèle statistique basé sur la loi Gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi Gamma de paramètres (α, β). Sa densité s'écrit

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \beta^{-\alpha} \exp\left(-x/\beta\right), \quad x \geq 0,$$

avec $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$. On admet que $\mathbb{E}(X) = \alpha\beta$ et $\mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2$.

On suppose dans toute la suite que la valeur de $\alpha = \alpha_0$ est connue et on souhaite estimer la valeur de β à l'aide d'un échantillon. On dispose d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ tiré selon une loi $\Gamma(\alpha_0, \beta)$.

1. Proposer un estimateur de β par la méthode des moments.
2. Montrer qu'il s'agit d'un estimateur sans biais et calculer son risque quadratique. S'agit-il d'un estimateur convergeant ?
3. Ecrire la vraisemblance du modèle et montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de β s'écrit
$$\hat{\beta} = \frac{\overline{X}_n}{\alpha_0}.$$
4. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, on a la convergence en loi
$$\sqrt{n}\left(\widehat{\beta} - \beta\right) \to \mathcal{N}\left(0, \frac{\beta^2}{\alpha_0}\right).$$
5. On sélectionne un échantillon de $n = 1000$ sinistres dans le (très grand) fichier de la compagnie d'assurance et on mesure $\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} x_i = 2450$ €.
Sachant que $\alpha_0 = 10$, proposez une estimation de β et construisez un intervalle de confiance asymptotique 95% pour β.
6. Il est couramment admis dans le monde de l'assurance que, pour cette catégorie de sinistres, la valeur de β est égale à 240. Tester cette hypothèse avec un risque (asymptotique) de première espèce $\alpha = 0.01$ et conclure.

Exercice 2 (4 pts)

Un gouvernement qui effectue une réforme fiscale craint une agitation populaire à quelques mois des élections. La police estime que tant que 15% de la population n'est pas prête à se mobiliser activement contre la réforme, celle ci peut être poursuivie. Une enquête d'opinion est commandée à un institut de sondage qui interroge 980 français : 131 sont prêts à agir activement contre la réforme et les 849 autres, même s'ils ne pas nécessairement favorables, ne s'opposeront pas à la réforme.

Un conseiller calcule que la proportion observée est de $131/980 \approx 13.4\%$ ce qui est bien inférieur à 15%.

1. Calculer un intervalle de confiance 95% pour la proportion de personnes prêtes à se mobiliser contre la réforme.
2. Sachant que le gouvernement est prudent, proposez un test d'hypothèse pour savoir s'il doit poursuivre la réforme ou la stopper. Calculez la p-value et prenez une décision (en considérant un risque de première espèce $\alpha = 0.05$)

Exercice 3 (4 pts)

On s'intéresse aux dépenses mensuelles des ménages consacrées à l'alimentation. On suppose que le montant, exprimé en €, est distribué selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Un institut des sciences de l'alimentation effectue des mesures sur un échantillon de $n = 23$ ménages et observe les valeurs suivantes : une valeur moyenne $\overline{x}_n^e = 396$€ et un écart-type corrigé $s_n^e = 58$€.

1. Construire un intervalle de confiance 95 % pour la dépense moyenne mensuelle μ des ménages consacrée à l'alimentation.
2. Peut-on considérer que la dépense moyenne des ménages dans la population française est supérieure à 380€. Effectuer pour cela un test avec un risque $\alpha = 0.05$.