Examen Math41

La durée de l'examen est 2h00. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$ on pose $u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n). La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?
(Indication : on pourra montrer pour cela que $|\ln(1+u) - u| \leq \frac{u^2}{2}$ pour $u \in [0,1]$).
2. Etudier la convergence (simple, uniforme, normale) de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$.
3. Montrer que la somme $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est une fonction continue et dérivable sur $[0,1]$.
4. Calculer $S'(1)$ et tracer l'allure de la fonction S sur $[0,1]$.
(Indication : on pourra remarquer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace (vectoriel) des polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}$ qui à $P(X) = \sum_i a_i X^i$ associe $N(P) = \sum_i |a_i|$ définit bien une norme sur l'espace vectoriel E.
2. Rappeler la définition de "continuité" d'une application $f : (E, N(.)) \to (E, N(.))$.
3. Soit D l'application "dérivation" $D : E \to E$ qui à la fonction polynôme $P(x) = \sum_i a_i x^i$ associe sa dérivée $P'(x)$.
L'application D est-elle continue sur $(E, N(.))$?
4. Soit $n \geq 1$. On considère maintenant l'espace vectoriel E_n des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n ainsi que l'ensemble A_n des éléments P de E_n dont le cœfficient dominant vérifie $a_n = 1$.
Montrer que l'application $L : E_n \to \mathbb{R}$ définie par $L(P) = a_n$ est une application continue.
En déduire que A_n est une partie fermée de E_n.
5. Notons $\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|dt$.
Indiquer pourquoi $\|.\|_1$ et $N(.)$ sont deux normes équivalentes sur E_n.
En déduire que $\inf_{P \in A_n} \int_0^1 |P(t)|dt > 0$.

Exercice 3. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A et B deux parties de E.

1. Rappeler la définition d'une partie compacte.
2. On définit
$$A + B = \{z \in E : \; \exists x \in A, \; \exists y \in B, \; z = x + y\}.$$
Montrer que si A est un compact et B un fermé alors $A+B$ est un fermé.
3. Montrer que les ensembles $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; xy = 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y = 0\}$ sont fermés.
4. En déduire, en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés, que A fermé et B fermé n'implique pas $A+B$ fermé.

Exercice 4. Soit $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f, calculer sa différentielle et expliquer pourquoi f est une fonction C^2 sur $\mathcal{D}$.
2. Calculer la dérivée directionnelle de f au point $a = (0,1)$ selon la direction $v = (1,1)$.
3. Trouver les points critiques de f et calculer la matrice Hessienne.
4. Déterminer si les points critiques sont des minima locaux, maxima locaux ou des points selles.