Chapitre 4

Espaces vectoriels normés

Nous reprenons dans ce chapitre les notions de limite, de fermés, d'ouverts, de compacts (segments) qui ont été déjà vues dans $\mathbb{R}$. Le cadre est un peu plus général, c'est celui des espaces vectoriels normés. Nous allons définir et étudier ici les notions de longueurs d'éléments et de distances entre éléments d'un même espace vectoriel E afin de mesurer leur proximité. Cela nous permettra de définir la notion de convergence d'une suite (et d'une série) d'éléments de E ainsi que la notion continuité pour des fonctions définies sur E ou une partie de E et à valeurs dans un (autre) espace vectoriel normé. On s'intéressera plus particulièrement aux espaces vectoriels E de dimension finie ($\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{C}^p$).

4.1 Définitions et exemples

Un espace vectoriel E (voir votre cours d'algèbre L1) sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans la suite) est un ensemble, dont les éléments sont appelés vecteurs, qui est muni d'une addition, notée $+ : E \times E \to E$ associative et commutative, et d'une multiplication : $\mathbb{K} \times E \to E$.
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors toute combinaison linéaire finie d'élements $x_1, \ldots, x_n$ de E affectés des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$ appartient à E

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in E.$$

On note 0 (ou bien 0_E) l'élément neutre pour l'addition : $x + 0 = x$, $\forall x \in E$. L'espace vectoriel est dit réel lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemples d'espaces vectoriels réels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :
Les espaces $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$
L'espace $C[a, b]$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.
L'espace ℓ^2 des suites de carré sommable ($(x_n)_{n\geq 1} \in \ell^2$ si $\sum_{n\geq 1} x_n^2 < \infty$).

Définition 4.1.1

(Norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E)
Une norme sur un espace vectoriel (réel ou complexe) E est une application notée $\|.\|$, $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{array}{lll} \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, & \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| & \textit{(homogénéité)} \\ \forall (x, y) \in E \times E, & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| & \textit{(inégalité triangulaire)} \\ \forall x \in E, & \|x\| = 0 \iff x = 0 & \textit{(séparation)} \end{array}$$

Si seules les deux premières conditions sont satisfaites, on dit que $\|.\|$ est une *semi-norme*. Pour un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on remplace la valeur absolue par le module.

Définition 4.1.2

On appelle espace vectoriel normé le couple constitué d'un espace vectoriel E et d'une norme $\|.\|$.

On le note $(E, \|.\|)$.

On peut associer des normes différentes à un même espace vectoriel. Voici quelques exemples classiques de normes dans $E = \mathbb{R}^n$. On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Norme euclidienne, $\|x\|_2$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Il s'agit bien d'une norme, elle provient du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Elle vérifie aussi (cf cours d'Algèbre) l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

Norme sup, $\|x\|_\infty$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

On peut vérifier facilement qu'il s'agit d'une norme.
Homogenéité :

$$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\|_\infty = \max(|\alpha||x_1|, \dots, |\alpha||x_n|) = |\alpha| \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = |\alpha| \, \|x\|_\infty \, .$$

Inégalité triangulaire : pour $i = 1, \dots, n$ on a $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ (inégalité triangulaire pour le module ou la valeur abs). Donc

$$\|x + y\|_\infty = \max_i(|x_i + y_i|) \leq \max_i(|x_i| + |y_i|) \leq \max_i(|x_i|) + \max_i(|y_i|) = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Séparation : Il est clair que $\|x\|_\infty = 0 \iff |x_i| = 0, i = 1, \dots, n \iff x = 0$.

Norme 1, $\|x\|_1$ (appelée aussi distance de Manhattan, à New York pour se déplacer entre blocs d'immeubles).

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Remarquons que dans le cas particulier où $n = 1$, l'e.v.n est $E = \mathbb{R}$ et ces trois normes sont égales à la valeur absolue.

Montrer en TD l'inégalité de Holder et l'inégalité de Minkowski dans $\mathbb{R}^n$

Normes sur les matrices

Il est possible de définir de nombreuses normes sur les matrices. Il existe plusieurs espèces. En voici deux. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.

— Celles issues d'une norme sur les vecteurs (on empile les colonnes d'une matrice dans un vecteur). Par exemple

$$\|A\|_1 = \sum_{ij} |A_{ij}| \quad \text{ou bien } \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{ij} |A_{ij}|^2} \ \text{ associée au produit scalaire } \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^t AB).$$

La norme $\|.\|_2$ est appelée norme de Frobenius.

— Les normes dites subordonnées, définies pour une matrice $A : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ (on identifie ici la matrice A à l'application linéaire correspondante définie sur E et à valeurs dans F).

$$\|A\| = \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Normes sur les espaces de fonctions

On peut munir l'e.v. $C[0,1]$ de plusieurs normes.
— La norme sup définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$,
— la norme L_1, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$,
— et la norme L_2,

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt\right)^{1/2}$$

On peut montrer facilement qu'une norme $\|.\|$, définie sur un e.v. E vérifie

Propriété 4.1.1

— $\forall x \in E, \quad \|-x\| = \|x\|$
— $\forall (x_1,\dots,x_p) \in E^p, \quad \left\|\sum_{i=1}^p x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^p \|x_i\|$ *(par récurrence)*
— $\forall (x,y) \in E\times E, \quad |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$ *(deuxième inégalité triangulaire)*

La dernière inégalité se montre de la façon suivante. On a $\|x\| = \|y + x - y\| \leq \|y\| + \|x-y\|$ et donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$. Par la même manipulation on montre aussi que $\|y\| \leq \|x\| + \|x-y\|$ d'où le résultat.

4.1.1 Normes équivalentes

On définit aussi la notion (utile pour la suite : convergence, continuité) de normes équivalentes.

Définition 4.1.3

(Normes équivalentes)
Deux normes N_1 et N_2 définies sur un espace vectoriel E sont équivalentes si

$$\exists \alpha > 0,\ \beta > 0 \ t.q.\ \forall x\in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Notons qu'on a de manière équivalente, pour tout $x \in E$,

$$\frac{1}{\beta} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(x).$$

Commençons par montrer la propriété suivante.

Propriété 4.1.2

Dans $E = \mathbb{R}^n$, les normes euclidiennes, sup et 1 sont équivalentes. Plus précisément, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty .$$

Preuve
On a clairement $\|x\|_\infty^2 \leq \sum_i |x_i|^2 = \|x\|_2^2$. Aussi,

$$\|x\|_2^2 = \sum_i |x_i|^2 \leq \left(\sum_i |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2 .$$

Par Cauchy-Schwarz on a

$$\|x\|_1 = \sum_i 1.|x_i| \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

et pour finir

$$\|x\|_2 \leq \left(n \max_i (|x_i|)^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty .$$

□

En fait il est possible de montrer un résultat plus fort

Théorème 4.1.3

(admis provisoirement)
Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Dans un ev E de dimension finie, ce résultat indique donc que si certaines propriétés telles que la convergence ou la continuité (cf les sections suivantes) sont vraies selon une certaine norme, elles sont vraies indépendamment de la norme choisie sur cet espace.

Une remarque importante sur les espaces de dimension infinie

Ce résultat est clairement lié à la dimension de l'espace (remarquez le $\sqrt{n}$ qui apparaît dans les inégalités précédentes) et n'est plus du tout vrai lorsque la dimension de E n'est pas finie. On peut montrer facilement que dans l'espace vectoriel E des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ les deux normes $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_2^2 = \int_0^1 f^2(t)dt$ ne sont pas deux normes équivalentes. Il suffit pour cela de considérer les fonctions $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. (cf TD).

4.1.2 Distance et espace métrique

Plus généralement on peut considérer des espaces dits métriques (des espaces X qui ne sont pas nécessairement des espaces vectoriels) munis d'une **distance** $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, qui vérifie par définition, $\forall x, y, z \in X$

— $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie).
— $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).
— $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (séparation).

Définition 4.1.4

On appelle **espace métrique** *le couple (X,d) constitué d'un ensemble X et d'une distance d définie sur X.*

Attention, dans un espace métrique l'addition de deux éléments $x+y$ n'a pas forcément de sens, la somme n'appartient pas toujours à X.

Un espace vectoriel normé est un espace métrique avec la distance d induite par la norme $\|.\|$ qui lui est associée.

Définition 4.1.5

(Distance induite par une norme dans un EVN).
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On définit la distance entre deux points x et y de E par

$$d(x,y) := \|x-y\|\,.$$

Il est immédiat de vérifier que la distance ainsi définie vérifie bien les propriétés d'une distance. On peut montrer qu'une distance vérifie les inégalités classiques suivantes

Propriété 4.1.4

Soit (X,d) un espace métrique.
Pour tout triplet (x,y,z) de X on a

$$|d(x,z) - d(x,y)| \leq d(y,z) \quad \textit{(deuxième inégalité triangulaire)}$$

Pour tout quadruplet (x,y,x',y') de X on a

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y') \quad \textit{(inégalité du quadrilatère)}$$

La notion de boule (ouverte et fermée) sera importante pour la suite.

Définition 4.1.6

(Boules ouvertes et fermées)
Soit a un point d'un evn $(E, \|.\|)$. Pour tout réel $r > 0$, on pose

— $B(a, r) := \{x \in E | \ \|a - x\| < r\}$ *(**boule ouverte** de centre a et de rayon r)*

— $\overline{B}(a, r) := \{x \in E | \ \|a - x\| \leq r\}$ *(**boule fermée** de centre a et de rayon r).*

Remarques : Dans un espace métrique les boules ouvertes et fermées sont définies en remplaçant $\|a - x\|$ par $d(a, x)$.

Si $E = \mathbb{R}$, muni de la norme "valeur absolue", on a $B(a, r) =]a - r, a + r[$ et $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$.

Faire un dessin des boules unité pour les distances associées aux différentes normes de $\mathbb{R}^2$

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la distance euclidienne $\|.\|_2$, la notion de boule est la notion géométrique usuelle.

On peut remarquer que si deux normes $\|.\|_a$ et $\|.\|_b$ vérifient $\forall x \in E$, $\|x\|_a \leq \|x\|_b$ alors $x \in B_b(0, 1) \iff \|x\|_b < 1 \Rightarrow \|x\|_a < 1 \Rightarrow x \in B_a(0, 1)$, soit $B_b(0, 1) \subset B_a(0, 1)$.

Définition 4.1.7

On dit qu'une partie $A \subset E$ est bornée si elle est incluse dans une boule.

On retrouve dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ la notion intuitive. Les segments sont bornés. Les boules sont bornées. Les pavés sont bornés. ...

4.2 Suites dans un e.v.n - Complétude des espaces de dimension finie

Nous nous intéressons maintenant à des suites d'éléments d'un e.v.n $(E, \|.\|)$ et considérons une généralisation du cadre de l'étude des suites et des séries numériques. En remplaçant la valeur absolue (dans $\mathbb{R}$) par la norme $\|.\|$ associée à l'e.v.n. E on définit naturellement la convergence par

Définition 4.2.1

Soient $(E, \|.\|)$ un e.v.n et $\ell \in E$.
*On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans E **converge** vers ℓ si la suite réelle $(\|x_n - \ell\|)$ converge vers 0. Soit encore*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \quad \|x_n - \ell\| \leq \epsilon.$$

Quelques remarques importantes

• Il est clair que si $\|.\|_a$ et $\|.\|_b$ sont deux normes **équivalentes** définies sur l'e.v. E alors $\|x_n - \ell\|_a \to 0$ est équivalent à $\|x_n - \ell\|_b \to 0$. En effet, par l'équivalence des normes $\|.\|_a$ et $\|.\|_b$, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha \|x_n - \ell\|_a \leq \|x_n - \ell\|_b \leq \beta \|x_n - \ell\|_a.$$

• Si E est un espace de dimension finie on a vu que toutes les normes sont équivalentes. Cela signifie que lorsqu'on montrer qu'une suite d'éléments de $(E, \|.\|)$ converge vers un élément ℓ, cela est vrai quelque soit la norme considérée sur E.

• Dans l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, la convergence de la suite de fonctions correspond à la convergence uniforme étudiée dans le chapitre précédent. La convergence selon cette norme est plus forte (sur les segments) que la convergence selon la norme $\|.\|_1$: il existe des suites qui tendent vers zéro selon $\|.\|_1$ mais pas selon $\|.\|_\infty$ (cf l'exemple $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$). Attention, ici un élément (vecteur) de E est une fonction.

Exemple avec des matrices. On se place dans l'e.v.n des matrices carrées de taille $p \times p$, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|A\| = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |A_{ij}|$. On considère la suite de matrices $(X_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$[X_n]_{i,j} = 1 \ \text{ si } i = j \qquad \text{et} \qquad [X_n]_{i,j} = (i - j)/n \ \text{ si } \ i \neq j.$$

Montrons que la suite X_n tend vers la matrice identité. Les normes sont équivalentes sur l'e.v.n des matrices carrées de taille p (c'est un espace de dimension finie, p^2). On a par ailleurs

$$\|X_n - I_p\| = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \frac{|i-j|}{n} \le \frac{p^3}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

On remarque qu'il suffit que chaque élément converge pour que la suite de matrices soit convergente (en prenant la norme sup définie par $\|A\|_\infty = \max_{ij} |A_{ij}|$).

Une notion importante pour la suite, les valeurs d'adhérence.

Définition 4.2.2

Soit $a \in (E, \|.\|)$ et (u_n) une suite d'éléments de E. Le point a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \ge N, \quad \|x_n - a\| \le \epsilon.$$

Il est clair que si une suite (u_n) converge vers un point $a \in E$, alors ce point est une valeur d'adhérence de la suite. Attention, un point a peut être valeur d'adhérence d'une suite sans pour autant qu'elle converge vers a. Par exemple, pour $a \in E$, la suite de termes $u_n = (-1)^n a$ n'est pas convergente mais elle possède 2 valeurs d'adhérence, -a et a. On peut exprimer de manière équivalente le fait que a soit valeur d'adhérence,

Propriété 4.2.1

Le point a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \|u_n - a\| \le \epsilon\}$$

contient une infinité d'éléments.

Il s'agit d'une conséquence immédiate de la définition. Pour tout n, il existe $n' > n$ tel que $\|u_{n'} - a\| \le \epsilon$, le cardinal de l'ensemble ne peut donc pas être fini.

Propriété 4.2.2

Pour que a soit valeur d'adhérence d'une suite (u_n), il faut et il suffit que a soit limite d'une sous suite de (u_n).

On rappelle qu'on définit une sous-suite (ou suite extraite) $(v_n)_n$ d'une suite (u_n) de la manière suivante : pour tout $n \ge 1$, $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Preuve

Soit $(v_n)_n = (u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite qui converge vers a. Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad n \ge N \Longrightarrow \|v_n - a\| \le \epsilon$$

Le point a est donc bien valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_k$ pour le rang $k = \varphi(N)$.

Réciproquement, si a est valeur d'adhérence de la suite (u_n), cela signifie que nous pouvons construire de manière itérative une suite extraite qui converge vers a.

Posons $n_0 = 1$. Comme a est valeur d'adhérence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut associer à chaque ϵ, de valeur $1/n$, un indice $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ tel que $\left\|u_{\varphi(n)} - a\right\| \le 1/n$. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_n$, $n \ge 1$, tels que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers a. □

On peut également s'intéresser à la convergence de séries d'éléments de $(E, \|.\|)$. On rappelle la définition de la notion de suite de Cauchy dans un e.v.n.

Définition 4.2.3

(Suite de Cauchy dans un e.v.n)
Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. Une suite (u_n) est de Cauchy si elle vérifie la condition suivante

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, \forall p \ge 0 \quad \|x_{n+p} - x_n\| \le \epsilon.$$

On peut alors montrer les propriétés suivantes dans un e.v.n $(E, \|.\|)$ (déjà vues dans $\mathbb{R}$). La propriété suivante pourra être utile pour montrer qu'une suite diverge. Il suffira qu'elle ne soit pas de Cauchy.

Propriété 4.2.3

Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve
Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ et $\epsilon > 0$. Il existe N tel $n \geq N \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leq \epsilon$. Par conséquent, pour tout $p \geq 0$, $\|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+p} - \ell + \ell - x_{n+p}\| \leq \|x_{n+p} - \ell\| + \|x_n - \ell\| \leq 2\epsilon$. □

Propriété 4.2.4

Toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy est bornée, c-à-d.

$$\exists a \in E \quad et \quad r > 0 \quad tels\ que \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a, r).$$

Preuve
Fixons $\epsilon = 1$. La suite est de Cauchy donc il existe N tel que $n \geq N$ et $p \geq 0 \Rightarrow \|u_{n+p} - u_n\| \leq 1$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u_N\| \leq \max(\|u_0 - u_N\|, \ldots, \|u_{N-1} - u_N\|, 1) = M_N.$$

Les éléments de la suite (u_n) appartiennent donc tous à la boule $\overline{B}(u_N, M_N)$, la suite est bornée. □

Propriété 4.2.5

Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, elle est convergente.

Preuve
Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite de Cauchy (u_n) et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_{n+p} - u_n\| \leq \epsilon$ si $p \geq 0$ et $n \geq N$. Si ℓ est valeur d'adhérence, alors il existe $m \geq N$ tel que $\|u_m - \ell\| \leq \epsilon$.
On a donc pour tout $n \geq N$,

$$\|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_m\| + \|u_m - \ell\| \leq 2\epsilon.$$

La suite est convergente. □

Définition 4.2.4

(e.v.n complet ou ***espace de Banach****)*
Un e.v.n. $(E, \|.\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy converge dans E.

Vous avez vu en S3 que $\mathbb{R}$ est complet alors que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas. Il est facile de montrer que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets : ils n'ont pas de "trous", les suites de Cauchy "ne s'échappent pas".

Propriété 4.2.6

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^p$ est complet.

Preuve
Commençons par étudier l'e.v.n $(\mathbb{R}^p, \|.\|_\infty)$. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Nous allons montrer qu'elle est convergente.
D'après la propriété 4.2.4, la suite $(u_n = (u_{1n}, \ldots, u_{pn}))_n$ est bornée, c-à-d, la suite réelle $(\|u_n\|_\infty)_n$ est bornée. Par conséquent, les suites $(u_{1n})_n$, $(u_{2n})_n$, ... et $(u_{pn})_n$ sont bornées.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, on peut donc extraire (pour $j = 1$) une sous-suite de $(u_{1n})_n$ qui converge vers un point $\ell_1 \in \mathbb{R}$. En itérant le procédé, on peut extraire une sous-sous suite de $(u_{1n}, u_{2n})_n$ convergeant vers (ℓ_1, ℓ_2). Après p itérations, on peut donc extraire une sous suite de u_n convergeant vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$.

Le point $\ell \in \mathbb{R}^p$ est donc une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. D'après la proposition 4.2.5, la suite de Cauchy est convergente, de limite ℓ.

Si maintenant $\mathbb{R}^p$ est muni d'une autre norme, notée $\|.\|$. On sait par le théorème d'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^p$ qu'il existe deux constantes $0 < c \leq C$, telles que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad c\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C\|x\|_\infty.$$

Par conséquent, si $(u_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy au sens de la norme $\|.\|$, elle est aussi de Cauchy au sens de la norme $\|.\|_\infty$, puisque

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \epsilon \ \Rightarrow \ \|x_{n+p} - x_n\|_\infty \leq \frac{1}{c}\epsilon$$

et donc la suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}^p, \|.\|_\infty)$. Elle est donc convergente dans $(\mathbb{R}^p, \|.\|_\infty)$ et par l'équivalence des normes elle est aussi convergente dans $(\mathbb{R}^p, \|.\|)$. □

Plus généralement on peut montrer que tout e.v.n. de dimension finie est complet (résultat admis). Ce résultat est très important puisqu'il suffira d'utiliser le critère de Cauchy pour déterminer si une suite est convergente ou divergente.

Remarque : Lorsque la dimension de l'espace n'est pas finie, la notion de complétude est fortement liée au choix de la norme. On peut par exemple montrer que $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ est complet. Il ne l'est pas si on remplace la norme $\|.\|_\infty$ par la norme $\|.\|_2$. Il faudrait alors considérer un espace "plus gros" pour qu'il soit complet.

4.3 Séries dans un e.v.n. complet

On peut maintenant donner un sens à une série d'éléments d'un e.v.n. $(E, \|.\|)$. Cette section porte donc sur une extension des séries numériques. On considère $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E et la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Définition 4.3.1

(série dans un e.v.n.)
On dit que la série $\sum_n u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est convergente dans $(E, \|.\|)$. Dans ce cas, on note sa limite

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Remarques
- Si $E = \mathbb{R}$ muni de la norme valeur absolue, $|.|$, c'est la définition de la convergence des séries numériques.
- Si $E = C[0,1]$ muni de la norme "sup", $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, on retrouve la définition de la convergence uniforme des séries de fonctions.

Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, une matrice réelle carrée de taille $p \times p$. On considère la série de terme général $u_k = \dfrac{A^k}{k!}$. Cette série a-t-elle un sens dans l'e.v. $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni d'une norme ?

Si l'espace considéré E est **complet**, le **critère de Cauchy** est un outil puissant pour montrer la convergence de la série.

Théorème 4.3.1

Dans un e.v.n. complet $(E, \|.\|)$,
la série $\sum_n u_n$ converge $\iff$ pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel

$$\forall n \geq N, \ \forall p \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| \leq \epsilon.$$

Preuve
L'espace est complet donc la suite (s_n) converge si elle est de Cauchy. Soit pour tout $\epsilon > 0$

$$\exists N,\ \forall n \geq N, \forall p \geq 0 \quad \|s_{n+p} - s_n\| \leq \epsilon$$

ce qui correspond exactement au critère énoncé car $s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$. □

On peut également considérer des critères basés sur la convergence absolue d'une série qui sont parfois plus facilement utilisables. On dit qu'une série $\sum_n u_n$ d'éléments de E est **absolument convergente** si la série numérique $\sum_n \|u_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une extension directe de la notion de série numérique (ou complexe) absolument convergente. On pourra étudier l'absolue convergence d'une série à l'aide des critères classiques sur les séries numériques à termes positifs. Le résultat suivant nous garantit que, dans un evn complet, l'absolue convergence entraine la convergence.

Théorème 4.3.2

(convergence absolue dans un e.v.n complet)
Dans un e.v.n complet, toute série absolument convergente est convergente.

La réciproque est fausse (par exemple $\sum_n (-1)^n/n$ n'est pas absolument convergente, mais elle est convergente).

Preuve
Puisque la série numérique $\sum_n \|u_n\|$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Fixons $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ \forall p \geq 0, \quad \sum_{k=n}^{n+p} \|u_k\| \leq \epsilon.$$

Or d'après l'inégalité triangulaire (vue au début du chapitre) on a

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|u_k\| \leq \epsilon,$$

La série vérifie le critère de Cauchy dans $(E, \|.\|)$, elle converge donc car $(E, \|.\|)$ est complet. □

Exemple suite : La série de terme général $u_k = \dfrac{A^k}{k!}$ est absolument convergente. Considérons une norme matricielle (on en a vu en TD) qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. On a alors $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\left\|A^k\right\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} \to \exp(\|A\|) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

On peut donc bien définir ainsi l'exponentielle d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

et on a montré au passage que $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

4.4 Notions de topologie : Ouverts, Fermés, Compacts

On s'intéresse maintenant à des parties de E.

Définition 4.4.1

(ouverts et fermés)
*On dit qu'une partie U de E est **ouverte** si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.*
*On dit qu'une partie F de E est **fermée** si son complémentaire dans E, noté $E \backslash F$, est une partie*

ouverte.

Notez bien que $x \in E\backslash F$ signifie $x \in E$ et $x \notin F$.

On retrouve les notions déjà vues dans $\mathbb{R}$ muni de la "norme" valeur absolue $|.|$.

Dans $E = \mathbb{R}$, un intervalle ouvert $]a, b[$ est une partie ouverte. (faire un dessin).
Un singleton $\{a\}$, avec $a \in E$ est un fermé car son complémentaire $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ est un ouvert.
Un intervalle fermé $[a, b]$ est fermé, car son complémentaire $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert.
L'intervalle $[a, b[$ n'est ni fermé, ni ouvert.

On retrouve que l'e.v.n. tout entier E est un ouvert et que l'ensemble vide $\emptyset$ est un fermé.
L'ensemble vide $\emptyset$ est aussi un ouvert (par argumentation de logique (FAUX $\Rightarrow$ VRAI) est vrai)) et donc E est aussi fermé.

On a aussi les propriétés suivantes

Propriété 4.4.1

Les boules ouvertes de E sont des parties ouvertes de E et les boules fermées de E sont des parties fermées de E.

Preuve en exercice □

Propriété 4.4.2

(union et intersection d'ouverts)

- *L'intersection d'une famille* ***finie*** *d'ouverts est un ouvert.*
- *La réunion d'une famille quelconque d'ouvert est un ouvert.*

Preuve
Considérons 2 ouverts U et V.
Si $U \cap V = \emptyset$, c'est un ouvert.
Si $U \cap V \neq \emptyset$ alors il existe $x \in U \cap V$. La partie U est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset U$. La partie V est un ouvert donc il existe aussi $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_2) \subset V$. La boule ouverte de centre x et de rayon $\min(r_1, r_2)$ est donc incluse dans $U \cap V$. Par conséquent $U \cap V$ est un ouvert. On peut itérer cette démarche pour tout nombre fini d'intersections.

Soit $x \in \cup_{i \in I} U_i$ où I est un ensemble au plus dénombrable et chaque U_i est un ouvert de E. Il existe un ouvert U_j tel que $x \in U_j$ donc $\cup_{i \in I} U_i$ est un ouvert. □

Attention, $\displaystyle\bigcap_{n \geq 1}]-1/n, 1/n[= \{0\}$: une intersection non finie d'ouverts peut ne pas être un ouvert.

De manière complémentaire, on a la propriété

Propriété 4.4.3

(union et intersection de fermés)

— *L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé*
— *La réunion d'une famille finie de fermés est un fermé.*

Le caractère fini de la réunion est ici encore important. Par exemple $\bigcup_{n \geq 1} [1/n, 1 - 1/n] =]0, 1[$ qui n'est pas un fermé.

Une propriété importante en dimension finie (puisque toutes les normes sont équivalentes dans ce cas).

Théorème 4.4.4

Si deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur un e.v. E, alors les ouverts (resp. les fermés) de (E, N_1) et (E, N_2) sont identiques.

Ainsi dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, il n'est pas nécessaire de faire référence à la norme pour désigner les ouverts et les fermés, puisque toutes les normes sont équivalentes.
Preuve
Soit U un ouvert de (E, N_1). Pour tout $a \in U$, il existe $r_1 > 0$ tel que la boule $\{x \in E, \|a - x\|_1 \leq$

$r_1\} \subset U$. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes, il existe $\beta > 0$ tel que $\|a-x\|_2 \le \beta \|a-x\|_1$ et donc la boule $\{x \in E, \|a-x\|_2 \le \beta r_1\} \subset U$. Il existe donc une boule de rayon $r > 0$ centrée en a qui est incluse dans U. Ceci est vrai pour tout $a \in U$, c'est donc un ouvert de $(E, \|.\|_2)$. On procède de la même manière dans l'autre sens. $\square$

Voici maintenant une propriété importante qui permet de caractériser les fermés.

Propriété 4.4.5

(Caractérisation séquentielle des fermés).
Soit $F \subset E$ non vide. La partie F est fermée ssi pour tout suite convergente de points de F, la limite est dans F.

Preuve
Montrons d'abord que si F est fermée alors la limite ℓ d'une suite (x_n) convergente d'éléments de F appartient nécessairement à F. Supposons que $\ell \notin F$. La valeur ℓ appartient donc à $E\backslash F$ qui est par définition un ouvert. Il existe donc $\eta > 0$ tel $B(\ell, \eta) \subset E\backslash F$. La suite est convergente, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge N$ implique $\|x_n - \ell\| \le \eta$. Ce qui est impossible puisque les (x_n) sont des éléments de F (et pas de $E\backslash F$).

Supposons maintenant que F n'est pas fermée et montrons qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de F qui converge vers $\ell \notin F$. Si F n'est pas fermée alors $E\backslash F$ n'est pas une partie ouverte et il existe un point $\ell \in E\backslash F$ tel qu'aucune boule de centre ℓ ne soit contenue dans $E\backslash F$. Ceci signifie que pour tout $r > 0$ (assez petit), il existe $x \in F$ tel que $\|x_n - \ell\| \le r$. On peut donc construire une suite $(u_n)_n$ d'éléments de F telle que pour tout $n \ge 1$, $u_n \in F \cap B(\ell, 1/n)$. La suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \notin F$.
Par contraposition, on a montré que : Toute suite convergente $(u_n)_n$ d'éléments de F a une limite $\ell \in F$ implique que F est une partie fermée. $\square$

On s'intéresse maintenant à des sous-ensembles très importants en analyse : les parties compactes, appelés aussi les compacts.

Définition 4.4.2

(Partie compacte)
*Une partie K d'un e.v.n $(E, \|.\|)$ est dite **compacte** ssi de toute suite de points de K on peut extraire une suite convergente dont la limite est dans K.*

Cela revient donc à dire que si K est compacte, toute suite d'éléments de K a au moins une valeur d'adhérence dans K.
Dans $\mathbb{R}$, les segments $[a, b]$ sont des compacts, ainsi que les unions finies de segments et les intersections dénombrables de segments.

Nous allons montrer qu'un compact est une partie bornée et fermée de E. Réciproquement, si la dimension de E est finie, alors une partie bornée et fermée est compacte.

Propriété 4.4.6

Une partie compacte est bornée (i.e. elle est incluse dans une boule).

Cette propriété indique en particulier qu'un e.v.n $(E, \|.\|)$ n'est jamais compact, car non borné.
Preuve
Par l'absurde. Soit K une partie d'un e.v.n $(E, \|.\|)$. Supposons que K n'est pas bornée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, K n'est pas inclus dans $B(0, n)$. On peut donc construire une suite $(a_n)_n$ d'éléments de K qui vérifie, pour tout n, $a_n \notin B(0, n)$, (soit $\|a_n\| \ge n$) et $\|a_{n+1} - a_n\| \ge 1$.
La suite $(\|a_n\|)$ diverge vers l'infini et on ne peut pas extraire de sous suite de (a_n) qui soit convergente.
On a donc montré l'implication suivante : K non bornée implique K non compacte.
Soit, par contraposée, K est compacte implique K est bornée. $\square$

Propriété 4.4.7

Une partie compacte K de E est fermée dans E.

Preuve
Soit (a_n) une suite d'éléments de K convergente dans $(E, \|.\|)$ vers une limite ℓ. Montrons que $\ell \in K$. Comme K est compact, on peut extraire une sous suite convergente $(a_{\varphi(n)})_n$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = \ell' \in K$. La suite (a_n) étant convergente, elle ne peut avoir qu'une seule limite, donc $\ell' = \ell \in K$. On en déduit, à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés, que K est une partie fermée de E. □

En corollaire, nous avons les propriétés suivantes.

Propriété 4.4.8

La réunion d'une famille finie de compacts est un compact.
L'intersection d'une famille de compacts est un compact.

Et enfin une caractérisation simple et importante des compacts dans les evn de dimension finie.

Propriété 4.4.9

Dans un e.v.n de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

Preuve
Il faut montrer que de toute partie K fermée et bornée de E on peut extraire d'une suite une sous suite convergente dont la limite est dans K. Soit (u_n) une suite d'éléments de K. Comme K est une partie bornée de E et que la dimension de E est finie, on peut extraire une sous suite convergente (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass) d'éléments de K. Comme K est une partie fermée, la limite appartient à K (proposition 4.4.5). □

Exemples : Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (ou tout espace de dimension finie) les boules fermées sont des parties compactes.

Récapitulatif :
$K \subset E$ est compacte $\Rightarrow$ K est fermée et bornée.
K est fermée et bornée et E est un e.v.n. de dimension finie $\Rightarrow$ K est compacte.

4.5 Applications continues

Il s'agit maintenant de définir la continuité d'une application d'un e.v.n (ou une partie) vers un autre e.v.n.
Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n et A une partie de E.
On considère une application $f : A \to F$.
On définit la notion d'adhérence d'une partie A comme A plus tous les points "au bord" de A. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ l'adhérence de $]0, 1[$ est l'intervalle $[0, 1]$. Plus précisément,

Définition 4.5.1

(adhérence d'une partie d'un e.v.n)
Un point a de E est adhérent à une partie A de $(E, \|.\|)$ s'il est limite d'une suite d'éléments de A.
On note $\overline{A}$ l'ensemble des points de E adhérents à la partie A.

On peut montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) de E contenant A.

Exemple : Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $A =]0, 1]$ est l'intervalle $\overline{A} = [0, 1]$.

Définition 4.5.2

(limite d'une fonction définie sur une partie d'un evn)
On dit que f a pour limite ℓ en $a \in \overline{A}$ ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \epsilon.$$

La définition est la même que pour les fonctions réelles de variables réelles à la différence que les valeurs absolues ont été remplacées par les normes des espaces de départ et d'arrivée.

On utilise souvent la caractérisation séquentielle de la limite :

Propriété 4.5.1

(Caractérisation séquentielle de la limite d'une application)
L'application f a pour limite ℓ en a ssi pour toute suite (u_n) de A qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Preuve omise (car identique à celle déjà vue dans $\mathbb{R}$). □

Définition 4.5.3

(Continuité de f).
L'application $f : A \to B$ est continue en $a \in A$ si $f(x)$ tend vers une limite, notée $f(a)$, quand x tend vers a. On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point a de A.

On peut prolonger l'application f par continuité en un point $a \in \overline{A} \backslash A$ (c-à-d $x \in \overline{A}$ et $x \notin A$) si $f(x)$ tend vers une limite quand x tend vers a.

La norme $\|.\|$ est un exemple classique d'application continue de $(E, \|.\|) \to (\mathbb{R}, |.|)$. En effet, par la deuxième inégalité triangulaire,

$$|\|x\| - \|a\|| \leq \|x - a\|$$

et donc en prenant $\alpha = \epsilon$,

$$\|x - a\| \leq \epsilon \Rightarrow |\|x\| - \|a\|| \leq \epsilon.$$

Définition 4.5.4

Soit $M > 0$. Une application $f : A \to B$ est M-Lipschtizienne si elle vérifie :

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq M \|x - y\|_A .$$

L'application "norme" est 1-Lipschitizienne.
Une application M-Lipschitzienne est toujours continue : il suffit de choisir $\alpha = \epsilon/M$ et d'appliquer la définition (mais une application continue n'est pas toujours de Lipschitz).
L'application "projection des coordonnées" est aussi continue (en TD).

La continuité peut être aussi caractérisée de manière séquentielle.

Propriété 4.5.2

(caractérisation séquentielle de la continuité).
L'application $f : A \to B$ est continue au point $a \in A$, ssi pour toute suite (x_n) de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Ainsi si f est continue, elle transforme toute suite convergente (dans A) d'éléments de A en une suite convergente d'éléments de B. Ce critère pourra être utile pour montrer qu'une application n'est pas continue.

Exemple d'une fonction discontinue.

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^4}$ n'est pas continue en 0. En effet $f(x_n, y_n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ si $(x_n, y_n) = (1,1)/n$. Pourtant $x \to f(x,y)$ et $y \to f(x,y)$ sont deux fonctions continues qui vérifient $f(0,y) = f(x,0) = 0$.

On peut également montrer que la composée de deux fonctions continues est une fonction continue.

Propriété 4.5.3

Si $f : A \to B$ est continue en $a \in A$ et $g : B \to C$ est continue en $f(a) \in B$, alors $g \circ f : A \to C$ est continue en a.

La preuve de cette proposition est immédiate (exercice de révision).

Le cas particulier des applications linéaires

Une application linéaire entre deux ev E et F, $f : E \to F$, vérifie : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et $\forall y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Théorème 4.5.4

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn.
Une application linéaire $L : E \to F$ est continue ssi il existe $C \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\|L(x)\|_F \leq C \|x\|_E .$$

Preuve.
Si $C = 0$ alors L est l'application nulle : $L(x) = 0_F$. Elle est continue.
On considère donc $C > 0$. Si L est C-Lipschitzienne elle est donc continue. Fixons $\epsilon > 0$. On a

$$\|L(x) - L(y)\|_F = \|L(x - y)\|_F \leq C \|x - y\|_E$$

et donc pour $\eta := \epsilon/C$: $\|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|L(x) - L(y)\|_F \leq \epsilon$.
Si L est continue, elle est en particulier continue en 0. Prenons $\epsilon = 1$ et appliquons le critère de continuité. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|y\|_E \leq \eta \;\Rightarrow\; \|L(y)\|_F \leq 1$$

Posons $C = 1/\eta$ et considérons $x \in E$, $x \neq 0$ (sinon c'est évident). Si on pose $y = \frac{\eta x}{\|x\|_E}$ alors $\|y\|_E = \eta$, et donc $\|L(y)\|_F \leq 1$. Comme L est une application linéaire, $L(y) = \frac{\eta}{\|x\|_E} L(x)$ et donc on a

$$\|L(x)\|_F = \frac{\|x\|_E}{\eta} \|L(y)\|_F = C \|x\|_E \|L(y)\|_F \leq C \|x\|_E$$

d'où le résultat. □

On en déduit la propriété suivante

Propriété 4.5.5

Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to F$ est continue.

Preuve. Il suffit de vérifier le théorème 4.5.4 en considérant une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne $\|x\|_2^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. On a en particulier que $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|x\|$. Posons $C = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F$. On a alors en utilisant la linéarité de f et l'inégalité triangulaire

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(e_i)\|_F \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F \leq C \|x\|_E$$

d'où la continuité de f. □

Ici aussi, cette propriété peut être généralisée sans difficulté en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par un e.v.n de dimension finie.

Voici maintenant une autre caractérisation intéressante de la continuité. Elle permettra de montrer qu'une partie est fermée (ou ouverte).

Propriété 4.5.6

(caractérisation des fermés par une application continue).
Soit une application $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ continue. Alors pour tout fermé (resp. tout ouvert)

B de F, $f^{-1}(B)$ est fermé (resp. ouvert) dans E où

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \text{ est l'image réciproque de } B \text{ par } f.$$

Remarque : on peut montrer qu'il y a en fait équivalence entre continuité et la propriété de l'image réciproque de f.

Exemple : Considérons une application continue $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et un réel $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) < t\}$ est un ouvert (car $B =]-\infty, t[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$) de $\mathbb{R}^3$ tandis que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) \geq t\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$ car image réciproque du fermé $B = [t, +\infty[$.

Faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$

Le résultat précédent porte sur l'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé. Il ne dit rien sur l'image directe. Par exemple la fonction $f : x \in \mathbb{R} \to \frac{|x|}{1+|x|}$ est continue et $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$ qui n'est ni fermé, ni ouvert.

Preuve
Montrons d'abord la propriété pour les ouverts. Soit B un ouvert de F. On distingue 2 cas.
Cas 1 : $f^{-1}(B) = \emptyset$, c'est un ouvert par définition.
Cas 2 : $f^{-1}(B)$ est non vide. Soit $x_0 \in f^{-1}(B)$ et notons $y_0 = f(x_0) \in B$. Comme B est un ouvert de F, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_F(y_0, \epsilon) \subset B$. La continuité de f en x_0 implique par ailleurs que $\exists \eta > 0$ tel que si $\|x - x_0\|_E \leq \eta$ alors $\|y_0 - f(x_0)\|_F \leq \epsilon$.
Cela signifie que $B_E(x_0, \eta)$ est contenue dans $f^{-1}(B)$. Ainsi, pour tout $x_0 \in f^{-1}(B)$, il existe une boule ouverte $B_E(x_0, \eta)$ contenue dans $f^{-1}(B)$, c'est donc un ouvert.

Pour les fermés. Soit B un fermé de F.
Cas 1 : $f^{-1}(B) = \emptyset$, c'est un fermé par définition.
Cas 2 : $f^{-1}(B)$ est non vide. Utilisons la caractérisation séquentielle des fermés et considérons $(u_n)_n$ un suite d'éléments de $f^{-1}(B)$ qui converge vers $\ell \in E$. Il faut montrer que $\ell \in f^{-1}(B)$. Puisque $f(u_n) \in B$ et que f est continue, la suite $(f(u_n))_n$ tend vers $f(\ell)$ qui appartient à B, car B est fermé. Cela veut donc dire que $\ell \in f^{-1}(B)$. La partie $f^{-1}(B)$ est donc fermée. $\square$

Pour finir ce chapitre, énonçons l'un des théorèmes les plus importants de l'analyse.

Théorème 4.5.7

(Théorème des bornes)
Sur un espace métrique compact K toute fonction réelle continue $f : K \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes. Il existe a et b dans K tels que pour tout $x \in K$ on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Preuve. Posons $M = \sup_{x \in K} f(x)$. Notons que M n'est a priori pas nécessairement fini. Pour tout $x \in K$, on a $f(x) \leq M$ et comme c'est une borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_n$ de points de K tels que $f(x_n) \to M$. Comme K est compact, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui est convergente, vers une limite $b \in K$. La fonction f étant continue en b, on a $f(x_{\varphi(n)}) \to f(b) < +\infty$. Donc $M = f(b) < +\infty$.
On procède de la même manière pour montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $f(a) = \inf_{x \in K} f(x)$ en étudiant la fonction $g = -f$. $\square$

Plus généralement, on peut montrer la propriété (importante) suivante qui dit que l'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

Théorème 4.5.8

Soit $f : X \to Y$ une application continue où $Y = \{f(x), x \in X\}$. Si X est compact alors Y est compact.

Preuve. Soit (y_n) une suite d'éléments de Y. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tel que $y_n = f(x_n)$. La partie X est compacte, on peut donc extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in X$. L'application f est continue en a donc $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $f(a) \in Y$. On a donc trouvé une sous-suite de (y_n) qui converge dans Y, il s'agit donc d'une partie compacte. $\square$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^2$, l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie compacte (fermée car image réciproque du fermé $\{1\}$ par la fonction continue $f(x,y) = x^2 + y^2$ et bornée). Si g est une fonction continue $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ alors l'image du cercle est aussi un compact de $\mathbb{R}^2$.

Terminons ce chapitre par la preuve d'un des résultats les plus importants, l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.5.9

Dans $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.

La preuve est intéressante en elle même car elle fait appel à de nombreux outils définis dans ce chapitre.

Preuve. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Nous allons montrer que cette norme est équivalente à la norme sup, (notée $\|.\|_\infty$ et définie au début du chapitre). Une fois ce résultat acquis, on en déduit de manière immédiate que toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$, puisqu'elles sont toutes équivalentes à $\|.\|_\infty$.

• Montrons tout d'abord que l'application $\|.\|$ définie sur $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue. Considérons la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit dans cette base $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et on a, par l'homogénéité de la norme et par l'inégalité triangulaire,

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \|e_i\|.$$

On en déduit, par la deuxième inégalité triangulaire que l'application $\|.\| : (\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est Lipschitzienne. Elle est donc continue. En effet, soit $y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| = \left\| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| e_i \right\| \leq C\|x - y\|_\infty$$

avec $C = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$.

• Considérons maintenant la sphère unité dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|x\|_\infty = 1\}$$

Il s'agit d'un ensemble fermé car image réciproque d'un fermé par une application continue (l'application $\|.\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et l'ensemble $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$). Il est aussi borné (par construction). L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie donc $\mathcal{S}_\infty$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

L'application $\|.\|$ est continue, elle atteint donc son minimum (noté c) et son maximum (noté C) sur $\mathcal{S}_\infty$. Remarquons que $c > 0$ car $\|.\|$ est une norme et $0_{\mathbb{R}^n} \notin \mathcal{S}_\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et non nul. Par homogénéité de la norme, on a $x/\|x\|_\infty \in \mathcal{S}_\infty$ et donc

$$c\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C\|x\|_\infty,$$

d'où le résultat. □