Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ et des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (la valeur absolue est alors remplacée par le module). On va s'intéresser dans ce chapitre à la convergence de suites de fonctions dans un cadre un peu plus général que celui des séries entières (Analyse S3).

3.1 Suites de fonctions : définitions et propriétés

Nous considérons 2 types de convergence d'une suite de fonctions. La convergence simple qui signifie qu'en chaque point x de l'intervalle de définition, la suite numérique $(f_n(x))_n$ est une suite convergente ainsi qu'un critère plus contraignant de convergence, la convergence uniforme.

Définition 3.1.1

(**convergence simple d'une suite de fonctions**).
Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $I \to \mathbb{R}$ est dite simplement convergente vers une fonction f sur I si en tout point $x \in I$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (\text{ ou encore } \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0).$$

On peut ré-écrire cette définition de la façon suivante. En tout point $x \in I$, on a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N \ \text{ on a } \ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \tag{3.1}$$

Exemple : pour $n \geq 1$, on définit $f_n(x) = x^n$ sur $I = [0,1]$.
On a pour tout n, $f_n(1) = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$ et, pour $0 \leq x < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. La suite de fonction f_n converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(1) = 1$ et $f(x) = 0$, pour $0 \leq x < 1$.

Cette notion de convergence (simple) n'est pas assez forte en général pour permettre de conserver les propriétés (continuité, dérivabilité, ...) des fonctions f_n lorsqu'on passe à la limite. On introduit pour cela la notion plus forte de **convergence uniforme** d'une suite de fonctions.

Définition 3.1.2

(**convergence uniforme d'une suite de fonctions**).
Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur I converge uniformément s'il existe une fonction f définie sur I telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

En d'autres termes, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction f si (faire un dessin avec un tube)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \forall n \geq N\ \forall x \in I \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

Il est alors clair (comparer avec (3.1)) que la convergence uniforme de f_n vers f implique la convergence simple de f_n vers f.

Exemple (suite) : La suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ sur $I = [0, 1]$ converge-t-elle uniformément vers la fonction f ?
On a $f_n(x) - f(x) = x^n$ si $x \in [0, 1[$ et $f_n(1) - f(1) = 0$. Donc, pour tout n fixé,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1.$$

La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$. Le "point à problème" est ici le point de discontinuité ($x = 1$) de la fonction limite f. Si on considère des segments contenus dans $[0, 1[$ on a alors la convergence uniforme vers 0. En effet pour tout $0 \leq a < b < 1$ on a

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} x^n = b^n$$

et $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ puisque $|b| < 1$.

De nombreuses propriétés sont conservées par passage à la limite si la convergence est uniforme. Le théorème suivant indique que le caractère borné est conservé.

Théorème 3.1.1

(**caractère borné préservé par la convergence uniforme**)
Soit (f_n) une suite de fonctions bornées ($\exists M_n, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq M_n$) convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Alors la fonction f est bornée.

Preuve
En utilisant (3.2), fixons $\varepsilon > 0$. On a, pour $n \geq N$ et $\forall x \in I$

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq \varepsilon + M_n.$$

$\square$

Le résultat important suivant indique que la convergence uniforme préserve la continuité. Notons bien qu'il s'agit d'une **propriété locale** (comme la continuité), il suffit de considérer un intervalle I contenant le point x tel que les hypothèses soient vérifiées.

Théorème 3.1.2

(**continuité préservée par la convergence uniforme**).
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et continues en un point $x \in I$. Si la suite de fonctions converge uniformément sur I vers une fonction f alors f est continue en x.

Ce résultat est faux pour la convergence simple (voir le premier exemple du chapitre avec le point $x = 1$).

Preuve *D'après (3.2), on a pour tout $u \in I$,*

$$\begin{aligned}|f(u) - f(x)| &\leq |f(u) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_u |f(u) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(x)| + \sup_x |f_n(x) - f(x)|.\end{aligned}$$

Fixons $\epsilon > 0$.
La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. La continuité de la fonction f_n en x se traduit par

$$\exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad |u - x| \leq \alpha \Rightarrow |f_n(u) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, $|u - x| \leq \alpha \Rightarrow |f(u) - f(x)| \leq 3\epsilon$ et la fonction f est continue en x. $\square$

Remarque : Notons aussi qu'une fonction continue sur un segment (donc uniformément continue par le théorème de Heine) peut toujours être approchée (au sens de la convergence uniforme) par une suite de fonctions en escaliers (qui ne sont donc pas continues). C'est ce résultat qui est à la base de l'intégrale de Riemann (Analyse S3).

Notons qu'on peut introduire un critère de Cauchy de convergence uniforme et le résultat suivant

Propriété 3.1.3

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur I. Alors la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\quad \sup_{x \in I} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\sup_{x \in I} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_{n+p}(x) - f(x)| + \sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)|.$$

Le résultat est ensuite immédiat en utilisant le fait que la convergence de (f_n) vers f est uniforme.

On pourra utiliser cette propriété pour montrer qu'un suite de fonctions n'est pas uniformément convergente. Il suffira qu'elle ne vérifie pas le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

Réciproquement, on indiquera (sans le montrer) dans le chapitre suivant que l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné est complet (toute suite de Cauchy est convergente, de limite appartenant à l'espace).

Interversion des limites

Voici maintenant un théorème important de ce chapitre qui indique quand il est possible d'intervertir 2 limites.

Théorème 3.1.4

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et a un élément de I.
Si la suite vérifie
1. (f_n) converge uniformément sur I vers f
2. Chaque fonction f_n admet une limite b_n en a ($\lim_{x \to a} f_n(x) = b_n$)
Alors
i) La suite b_n converge vers un réel b
ii) f admet en a la limite b

Ce résultat qui semble évident (il ne l'est pas) peut se formuler ainsi

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = b.$$

Preuve

On établit d'abord que b_n converge vers b en montrant que c'est une suite de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de f_n vers f sur I implique que la suite vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\quad \sup_{x \in I} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

On en déduit, lorsque x tend vers a que

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\quad |b_{n+p} - b_n| \leq \varepsilon$$

La suite b_n est donc de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). Elle converge vers b.

Montrons maintenant que f admet en a la limite b. on a

$$|f(x) - b| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. La convergence de b_n vers b se traduit par

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_1\quad |b_n - b| \leq \varepsilon.$$

La convergence uniforme de f_n vers f se traduit par

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_1\quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

En prenant $N = \max(N_1, N_2)$, *on a alors*

$$\forall n \geq N \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \textit{et}\ |b_n - b| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall n \geq N\ \forall x \in I \quad |f_n(x) - b| \leq 2\varepsilon + |f_n(x) - b_n|.$$

La fonction f_n *admet* b_n *comme limite en* a. *Il existe donc* $\eta > 0$ *(qui dépend de* ε *et de* n*) tel que*

$$|x - a| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f_n(x) - b_n| \leq \epsilon.$$

Au final, nous avons donc : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0$ *tel que*

$$|x - a| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| \leq 3\epsilon,$$

ce qui achève la preuve. □

On remarque dans la preuve que x peut n'appartenir qu'à l'adhérence de I (un des bords si I est un intervalle ouvert). En particulier si $I = [0, +\infty[$, le résultat peut s'appliquer en $+\infty$.

On peut refaire la preuve du Théorème 3.1.2, en utilisant ce résultat.
Preuve du Théorème 3.1.2.
Si f_n *est une suite de fonctions continues qui converge unif. vers une fonction* f *sur* I *alors les 2 premiers points du théorème 3.1.4 sont vérifiés. On en déduit que pour tout* $a \in I$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} b_n = b$$

et la fonction f *est continue en* a. □

Ce dernier résultat peut être utile pour montrer, par l'absurde, qu'une suite de fonctions n'est pas uniformément convergente.

Exemple d'utilisation : on considère la suite (f_n) de fonctions continues $f_n(x) = \frac{n}{n+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a la convergence simple $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Pour n fixé, $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. Les 2 limites sont différentes, la convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Interversion limite et intégrale

De même, on peut montrer facilement qu'on peut intervertir limite et intégrale pour des suites de fonctions (continues ou continues par morceaux) qui convergent uniformément.

Théorème 3.1.5

(**intégration sur un segment d'une suite de fonctions**).
Soit f_n *une suite de fonctions continues (par morceaux) de* $I = [a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) qui converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers une fonction* f *qui est aussi continue par morceaux sur* $[a, b]$. *Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Preuve
On a pour tout n

$$0 \leq \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

Comme $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ *tend vers 0 quand* $n \to \infty$, *on en déduit directement le résultat.* □

Interversion limite et dérivation ou intégration

Les conditions énoncées dans les théorèmes suivants sont des conditions suffisantes (qui peuvent parfois être affaiblies, cf le cours d'intégration de L3 et la convergence dominée).

Théorème 3.1.6

(convergence uniforme et intégration)
Soient $a \in I$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur I. Pour tout n, on note h_n la primitive de f_n sur I telle que $h_n(a) = 0$ (i.e. $h_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$).
Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de I,
alors la suite de fonctions (h_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive h de f telle que $h(a) = 0$.
Et, pour tout $x \in I$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt = \int_a^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \right) dt$$

Preuve
La continuité des fonctions f_n et la convergence uniforme sur tout segment de f_n vers f nous donne la continuité de la fonction f sur I. On note, pour $x \in I$

$$h_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \qquad et \qquad h(x) = \int_a^x f(t)dt$$

On a donc pour tout $u \in [a, x]$

$$|h_n(u) - h(u)| \leq \int_a^u |f - f_n| \leq \int_a^x |f - f_n| \leq (x - a) \sup_{t\in[a,x]} |f(t) - f_n(t)|$$

et par conséquent,

$$\sup_{u\in[a,x]} |h_n(u) - h(u)| \leq (x - a) \sup_{t\in[a,x]} |f(t) - f_n(t)|.$$

Ainsi, la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f entraine la convergence uniforme de la suite $(h_n)_n$ vers h, sur tout segment $[a, x]$ de I. □

Théorème 3.1.7

(**dérivation d'une suite de fonctions**).
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I telle que
1. Pour tout n, f_n est de classe C^1 sur I
2. La suite f_n converge simplement sur I vers f
3. La suite f'_n converge uniformément sur tout segment de I vers g
Alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

Il faut bien noter que dans le théorème de dérivation la condition de convergence uniforme porte sur la suite des dérivées $(f'_n)_{n\geq1}$.

Preuve
Soit a un point de I. Chaque fonction f_n est C^1, donc

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\, dt.$$

On note $h_n(x) = \int_a^x f'_n(t)dt = f_n(x) - f_n(a)$.
La suite de fonctions $(f'_n)_{n\geq1}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent (convergence uniforme et intégration), donc la suite de fonctions h_n converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction h définie par $h(x) = \int_a^x g(t)dt$.
La fonction g est continue (car les f'_n sont continues et convergent uniformément) donc h est de classe C^1 sur I. Finalement la convergence simple de f_n vers f sur I donne $f(x) = f(a) + h(x)$ et donc f est C^1 et $f' = g$. □

Les trois conditions du théorème précédent sont importantes. Voici une illustration.
Soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-1}}$ pour $x \in [-1, 1]$. La suite f_n converge simplement et même uniformément vers $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ sur $[-1, 1]$. Toutes les fonctions f_n sont C^1 sur $[-1, 1]$ et pourtant la limite f n'est pas dérivable en 0. Le problème vient ici du fait que la suite f'_n n'est pas uniformément convergente (problème en 0).

3.2 Séries de fonctions : définitions et propriétés

On s'intéresse maintenant à des suites de fonctions particulières, les séries de fonctions. On considère une suite de fonctions f_n définies sur un même intervalle I et, pour $x \in I$, la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Vous avez déjà étudié en S3 des séries de fonctions particulières : les séries entières (par exemple $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ pour $x \in \mathbb{R}$; ou bien $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} x^n/n$ pour $x \in]-1, 1[$ ou encore $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.

Voici un exemple de série de fonctions qui n'est pas une série entière, la fonction ζ de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Cette fonction est bien définie sur $]1, +\infty[$ car la série numérique $\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha}$ est convergente dès que $\alpha > 1$.

Nous allons voir qu'il est possible de montrer qu'elle possède, comme les séries entières, certaines propriétés de régularité (continuité, dérivabilité, ...) en appliquant les résultats obtenus pour les suites de fonctions à la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles.

Définition 3.2.1

(convergence simple d'une série de fonctions)
La série de fonctions $\sum f_n$ de terme général f_n converge simplement sur I si la suite de fonctions (s_n) converge simplement sur I. En tout $x \in I$, on note $S(x)$ la limite,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Nous pouvons comme pour les séries de fonctions définir la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum f_n$ en utilisant la suite de fonctions des sommes partielles.

Définition 3.2.2

(Convergence uniforme d'une série de fonctions)
Une série de fonctions $\sum f_n$ sur I est appelée série uniformément convergente sur I si la suite des fonctions sommes partielles (s_n) converge uniformément sur I.
Pour tout $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ et $\forall x \in I$

$$|s_n(x) - S(x)| \leq \epsilon.$$

En d'autres termes, pour montrer la convergence uniforme de la série $\sum_n f_n$ sur un intervalle I, il faut vérifier que le reste converge uniformément vers 0,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |s_n(x) - S(x)| \;=\; 0.$$

Il est en général difficile de contrôler le reste d'une série de fonctions. C'est cependant parfois possible pour les séries alternées comme le montre la propriété suivante.

Propriété 3.2.1

(Critère de convergence uniforme pour les séries alternées)
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions positives, définies sur I telle que :
1. la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur I
2. Pour tout $x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))_n$ décroit (c-à-d $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$).
Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n$ converge uniformément sur I.

Preuve
Fixons la valeur de $x \in I$. On obtient par le critère de convergence des séries alternées que la série numérique $\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n(x)$ est convergente (car la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0). Ceci est vrai pour tout $x \in I$ et par conséquent, la série de fonction $\sum_n(-1)^n f_n$ est simplement convergente sur I, on note S sa limite. Pour montrer la convergence uniforme, étudions, pour $x \in I$, le reste

$$R_n(x) = S(x) - \sum_{i=1}^{n}(-1)^n f_n(x)$$

D'après les résultats sur les séries alternés vus en S3, on a

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_{n+1}(x)|,$$

et donc $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |R_n(x)| = 0$, puisque la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur I. La convergence de la série de fonctions $\sum_n f_n$ est uniforme sur I. □

Nous pouvons aussi introduire une nouvelle notion de convergence qui est plus forte que la convergence uniforme, la convergence normale.

Définition 3.2.3

(Convergence normale d'une série de fonctions)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I. On dit que la série de fonctions est normalement convergente sur I s'il existe une série (numérique) convergente $\sum a_n$ de nombres positifs tels que $\forall n,\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq a_n$.

Nous avons le résultat suivant qui est très utile car il est plus simple de montrer la convergence normale (lorsqu'elle est vraie) d'une série de fonctions que sa convergence uniforme.

Propriété 3.2.2

Convergence normale $\Rightarrow$ Convergence uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple

Preuve
La deuxième implication "Convergence uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple" est évidente.
Montrons la première. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui est normalement convergente. Alors pour tout $x \in I$, (x fixé) la série numérique $\sum_n |f_n(x)|$ est convergente (série à termes positifs majorée par la série convergente de terme général a_n). La série $\sum_n f_n(x)$ converge aussi (car absolument convergente). On note $S(x)$ sa limite.
Enfin, $\forall x \in I$,

$$|S(x) - s_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Le dernier terme est le reste d'une série numérique convergente, donc il tend vers 0 quand n tend vers l'infini (et ce indépendamment de x). On a donc bien montré ce qu'il fallait :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |S(x) - s_n(x)| = 0.$$

□

Exemple de la fonction ζ.
Il est clair que pour tout x dans un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 1$ on a $|n^{-x}| \leq n^{-a}$ terme

général d'une série numérique convergente. La fonction ζ est donc normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ pour $a > 1$.

En revanche on montre qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $]1, +\infty[$ en montrant par l'absurde que le critère de Cauchy de convergence uniforme n'est pas satisfait. En effet, s'il est vérifié, on doit avoir

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ t.q. } \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in]1, +\infty[\quad \left| \sum_{k=n}^{n+p} k^{-x} \right| \leq \varepsilon.$$

On voit le problème apparaître lorsque $x \to 1$. En choisissant $p = n$ on a alors

$$\left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^x} \right| \geq n \frac{1}{(2n)^x}$$

et donc

$$\sup_{x \in]1, +\infty[} \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^x} \right| \geq \sup_{x \in]1, +\infty[} n \frac{1}{(2n)^x} = \frac{1}{2}$$

car la fonction $x \mapsto \exp(-x \ln(2n))$ est décroissante. Le critère de Cauchy est contredit. La convergence n'est pas uniforme sur $]1, +\infty[$.

Remarquons qu'il est facile de voir que la série de terme général $\sup_{x \in I} |f_n(x)|$ est divergente, ce qui signifie la suite de fonction $\sum_n f_n$ n'est pas normalement convergente sur $I =]1, +\infty[$.

Interversion des limites pour une série de fonctions

Le théorème suivant se déduit immédiatement du théorème d'interversion des limites pour une suite de fonctions. On peut remplacer dans les théorèmes qui suivent la condition "convergence uniforme" par la condition "convergence normale". Ici encore il s'agit d'une propriété "locale" (il suffit que les conditions soient vraies dans un intervalle contenant a).

Théorème 3.2.3

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et a un élément de I.
Si
1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers S
2. Chaque fonction f_n admet une limite b_n en a ($\lim_{x \to a} f_n(x) = b_n$)
Alors
i) La série $\sum b_n$ converge vers un réel b
ii) La fonction somme S admet en a la limite b

Dit d'une autre manière,

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Comme pour les suites de fonctions, on peut également considérer le cas où a est une des bornes de l'intervalle de définition (et considérer par exemple la limite en $+\infty$).

Exemple (suite) : la fonction ζ

Ici encore on peut utiliser ce résultat pour montrer d'une autre manière que la convergence n'est pas uniforme sur $]1, +\infty[$. Considérons le point $a = 1$ qui est bien sur le bord de I. On a que chaque fonction $f_n = n^{-x}$ converge vers $1/n$ quand $x \to 1$. C'est le terme général d'une série divergente. Les conclusions du théorème sont contredites (car la convergence n'est pas uniforme sur I).

On peut également montrer que $\lim_{x \to \infty} \zeta(x) = 1$. En effet, la convergence est normale, donc uniforme, sur $I = [2, +\infty[$ et chaque fonction $f_n(x) = n^{-x}$ a pour limite 0 quand $x \to \infty$ et si $n \geq 2$. Si $n = 1$ alors $f_n(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Les conditions du théorème sont remplies et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) \;=\; \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \;=\; 1.$$

Continuité d'une série de fonctions

Théorème 3.2.4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur I et uniformément convergente sur tout segment de I. Alors la somme $S = \sum f_n$ est continue sur I.

La preuve est omise. Elle est une conséquence directe du théorème de continuité d'une suite de fonctions appliqué à la suite de fonctions $(s_n)_{n\geq 1}$.

Exemple : continuité de la fonction ζ

La continuité de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$ est une conséquence directe du théorème précédent. Les fonctions $f_n(x) = n^{-x}$ sont continues sur $]1, +\infty[$ et la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]1, +\infty[$.

Intégration et dérivation d'une série de fonctions

Théorème 3.2.5

(intégration terme à terme sur un segment d'une série de fonctions)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues de $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction S,
Alors la série numérique $\sum \int_a^b f_n$ est convergente et

$$\sum_{n\geq 1}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)dx\right).$$

La preuve est ici aussi une conséquence directe du théorème sur les suites de fonctions appliqué à la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 1}$.

Théorème 3.2.6

(dérivation terme à terme d'une série de fonctions)
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I telle que
1. Pour tout n, f_n est de classe C^1 sur I
2. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S,
3. La suite $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.
Alors la fonction $S = \sum f_n$ est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x).$$

La preuve est une conséquence directe du résultat sur la dérivation d'une série de fonctions.

Exemple (suite) : la fonction ζ

Pour $x > 1$, $f_n(x) = 1/(\exp(x\ln n))$ et donc

$$f_n'(x) = \frac{-\ln n\ n^x}{n^{2x}} = \frac{-\ln n}{n^x}$$

On a donc pour tout $x \in [a, b]$ où $1 < a < b$

$$|f_n'(x)| \leq \frac{\ln n}{n^a}$$

C'est le terme général d'une série numérique convergente : la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $I =]1, +\infty[$. La fonction ζ est donc C^1 sur $]1, +\infty[$.

On obtient par récurrence que $f^{(p)}(x) = (-\ln n)^p n^{-x}$, pour $p \geq 1$. La fonction ζ est donc C^p sur $]1, +\infty[$ pour tout $p \geq 1$, elle est par conséquent C^∞.

On obtient pour $p = 1$ et $p = 2$ et $x > 1$,

$$\zeta'(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^x} \leq 0$$
$$\zeta^{(2)}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$$

La fonction ζ est donc décroissante (facile à voir directement) et convexe.

3.3 Retour sur le cas particulier des séries entières

Les séries entières constituent un cas particulier très important des séries de fonctions, cas particulier que vous avez étudié en détails en S3. Il s'agit des séries de fonctions où $f_n(x) = a_n x^n$ et $(a_n)_n$ est une suite de cœfficients à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Nous allons redémontrer les propriétés de continuité, de dérivabilité et de primitivation des séries entières à l'aide des outils généraux vus dans les sections précédentes.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, (on rappelle que le rayon de convergence est $R = \sup A$ où $A = \{r \geq 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$).

Théorème 3.3.1

(Convergence normale d'une série entière).
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R (> 0). Pour tout $0 \leq r < R$, la série entière est normalement convergente sur le segment $[-r, r]$.

La preuve est immédiate. En effet sur $[-r, r]$, on a $|a_n x_n| \leq |a_n||r|^n$ qui est le terme général d'une série convergente, puisque $r < R$.

On en déduit de manière immédiate la continuité de la série entière $\sum a_n x^n$ sur $]-R, R[$ puisqu'elle converge normalement sur tout intervalle $[-r, r]$ pour $0 < r < R$ et que chaque fonction $f_n(x) = a_n x^n$ est continue.

On peut obtenir aussi très facilement la primitive d'une série entière par intégration terme à terme.

Théorème 3.3.2

(Primitive d'une série entière).
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R (> 0). Une primitive sur $]-R, R[$ de la fonction somme S série entière s'obtient en intégrant terme à terme :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Il faut tout d'abord se rappeler (voir cours d'analyse en S3) le résultat important suivant : le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est aussi égal à R. De nouveau, la preuve est alors une conséquence directe de la convergence normale de la série sur tout segment $[-r, r]$ avec $0 < r < R$. On peut donc utiliser le résultat général d'intégration terme à terme (Théorème 3.2.5).

Enfin, énonçons le théorème de dérivation.

Théorème 3.3.3

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R (> 0). La fonction somme S de la série entière est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S'(x) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x^n)' \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Pour montrer ce résultat, il suffit de se souvenir (voir cours d'analyse en S3) que la série entière $\sum na_n x^{n-1}$ admet aussi R pour rayon de convergence. Pour tout $0 < r < R$, elle est donc normalement convergente sur $[-r, r]$ et on peut appliquer le théorème général (Théorème 3.2.6) de dérivation des séries de fonctions.