Chapitre 1

Rappels et compléments sur l'intégrale de Riemann

Commençons par un rappel.

Théorème 1.0.1

(Théorème fondamental du calcul intégral)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in [a, b]$, posons

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

La fonction F est définie sur $[a, b]$, elle est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

En d'autres termes, si F est une primitive d'une fonction continue f alors $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$.

Preuve
On a par la relation de Chasles, $F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$.
Par la formule de la moyenne (cf TD 1), il existe $t_h \in [x, x + h]$ tel que $\int_x^{x+h} f(t)dt = hf(t_h)$. Faisons tendre h vers 0. Alors $t_h \to x$ et par continuité de f, $f(t_h) \to f(x)$. Donc $\lim_{h\to 0}(F(x+h)-F(x))/h = f(x)$. La fonction F est dérivable en x, et $F'(x) = f(x)$. □

Nous énonçons maintenant des propriétés très utiles pour la majoration et le calcul effectif d'intégrales (et de primitives en remplaçant le b en haut de l'intégrale par une variable).

1.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.1.1

Si f et g sont continues sur $[a, b]$ alors

$$\left(\int_a^b f \times g\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

avec égalité si f et g sont proportionnelles.

Preuve
La preuve est toujours la même. $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x) + tg(x))^2$ est continue, positive et par linéarité et croissance de l'intégrale de Riemann,

$$\underbrace{\int_a^b (f + tg)(x))^2\, dx}_{\geq 0} = \int \left(f^2 + 2tfg + t^2g^2\right) dx = \int f^2 + 2t \int fg + t^2 \int g^2$$

Si $g = 0$ le résultat annoncé est évident.

Si $g \neq 0$ alors, comme g est continue, $\int g^2 > 0$. Par conséquent, le polynôme de degré 2 en t,

$$P(t) = \int f^2 + 2t \int fg + t^2 \int g^2$$

vérifie par construction $P(t) \geq 0$ pour tout t et son discriminant $\Delta \leq 0$ avec

$$\Delta = 4 \left(\int fg \right)^2 - 4 \int f^2 \int g^2 \leq 0$$

d'où le résultat. Enfin, en cas d'égalité (discriminant nul), on a pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$ (racine double) $f(x) + t_0 g(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Les deux fonctions f et g sont proportionnelles. □

Exemple d'utilisation

Soit f une fonction continue et positive sur $[0, 1]$.

$$\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

Remarque 1

On peut observer que cette inégalité est associée au produit scalaire (dans l'espace des fonctions intégrables) $\langle f, g \rangle = \int fg$.

1.2 Intégration par parties

Cette technique est utile lorsqu'on peut écrire la fonction à intégrer comme le produit de 2 fonctions, dont on connait une primitive pour l'une des 2.

Théorème 1.2.1

Si f et g sont 2 fonctions continûment dérivables sur un intervalle $[a, b]$ alors

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b gf'$$

Preuve

Posons $h := fg$. La fonction h est dérivable et de dérivée continue, $h' = f'g + fg'$, on a donc d'après le théorème fondamental (a rappeler) et la linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} [h]_a^b &= \int_a^b h' \\ &= \int_a^b fg' + \int_a^b f'g \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Voici quelques exemples d'utilisation de l'intégration par parties.

Calcul de $\int_1^2 \ln(x) dx$

Posons $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(x) dx &= [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 1 dx \\ &= 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

Calcul de $\int_0^1 xe^x dx$

Posons $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$. On connait une primitive de g', $g(x) = e^x$ et on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

Cette méthode se généralise directement aux calculs d'intégrales de la forme

$$\int_a^b P(x)e^x dx$$

où $P(x)$ est un polynôme en x. Il faut effectuer des intégrations par parties successives de façon à faire diminuer le degré du polynôme (en le dérivant, $f(x) = P(x)$).
Cette technique s'applique également lorsque l'exponentielle est remplacée par des fonctions trigonométriques cos, sin où des fonctions hyperboliques ($\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ et $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$)

Calcul de $\int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$

On pose $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \cos(x)$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \cos(x) dx &= \left[x^2 \sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin(x) dx \\ &= -2\left([x.(-\cos(x))]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos(x)) dx \right) \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Calcul de $\int_0^1 \arctan(x) dx$

On se rappelle que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée vaut $\arctan(x)' = (1+x^2)^{-1}$. En posant $f(x) = \arctan(x)$ et $g'(x) = 1$, on obtient

$$\int_0^1 \arctan(x) dx = [x \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

On sait que pour toute fonction strictement positive $u(x)$, la fonction composée $\ln(u(x))$ est dérivable, de dérivée $\ln(u(x))' = u'(x)/u(x)$ (règle de dérivation d'une fonction composée). Et d'une manière plus générale, pour toute fonction continue non nulle en x, $(\ln(|u(x)|))' = u'/u$.

En remarquant que la fonction $h(x) = x(1+x^2)^{-1}$ s'écrit, à un facteur multiplicatif près, comme le rapport de la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ et de sa dérivée, on en déduit

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

1.3 Changement de variables

Un théorème important que vous reverrez par la suite.

Théorème 1.3.1

Soient φ une fonction continûment dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J et f est une fonction continue sur J. Si a et b sont deux points de I alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

Preuve
Soit F une primitive de f sur J. Soit $G := F \circ \varphi$ (fonction dérivable de I dans J). Sa dérivée est

$$G' = \varphi' \ (F' \circ \varphi) = \varphi' \ (f \circ \varphi)$$

Le théorème fondamental nous dit alors

$$\begin{aligned} F(\varphi(a)) - F(\varphi(b)) &= G(a) - G(b) \\ &= \int_a^b G'(t)dt \\ &= \int_a^b f \circ \varphi(t) \ \varphi'(t)dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Remarquons qu'ici il n'est pas nécessaire de supposer que la fonction φ est bijective sur son support. Souvent on veut poser $x = \varphi(t)$ et il est alors délicat de trouver les bonnes bornes pour l'intégrale de gauche, sauf dans le cas où φ est une bijection.

On a alors sous cette condition supplémentaire et les conditions du théorème précédent

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\varphi'(t) \ dt.$$

En effet, $\varphi : I \to [c,d]$ et $f : [c,d] \to: \mathbb{R}$ et $I = [\varphi^{-1}(c), \varphi^{-1}(d)]$ si φ est croissante (et donc φ^{-1} est aussi croissante).

Moyen mnémotechnique : on pose $x := \varphi(t)$ et on remplace x par sa valeur en fonction de t et dx par $\varphi'(t)dt$.

Voici quelques exemples d'utilisation du changement de variable pour le calcul d'intégrales, d'autres seront vus en TD.

Cas d'un changement affine $x = \beta t + \gamma$

On cherche

$$\int_0^4 \cos(3t+1)dt = \frac{1}{3}\int_0^4 3\cos(3t+1)dt$$

On utilise la formule du théorème de changement de variable de droite à gauche. On pose $x := \varphi(t) = 3t+1$ pour obtenir x à l'intérieur du $\cos$. On a alors $\varphi'(t) = 3$, soit $dx = 3dt$ soit encore $dt = 1/3dx$. Pour $t = 0$, on a $x = 1$ et pour $t = 4$, on a $x = 13$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^4 \cos(3t+1)dt &= \frac{1}{3}\int_1^{13} \cos(x)dx \\ &= \frac{\sin(13) - \sin(1)}{3} \end{aligned}$$

Cas d'une intégrale du type $\int u'(t)\exp(u(t))dt$

On pose alors $f = \exp$ et $\varphi = u$.

Prenons l'exemple de l'intégrale $\int_0^{4\pi} \cos(t)\exp(\sin(t))dt$.
On pose $\varphi = \sin$ et on a alors

$$\cos(t)\exp(\sin(t)) := \varphi'(f \circ \varphi)$$

et par conséquent

$$\int_0^{4\pi} \cos(t)\exp(\sin(t))dt = \int_{\sin(0)}^{\sin(4\pi)} \exp(x)dx = 0.$$

Calcul de $\int_0^u \tan(t)dt$, pour $u \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Comme $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$, et $\cos'(t) = -\sin(t)$, on peut poser $\varphi(t) = \cos(t)$ et $f(x) = 1/x$. On obtient

$$\int_0^u \tan(t)dt = -\int_0^u \frac{1}{\cos s}(-\sin(s))ds = -\int_{\cos(0)}^{\cos u} \frac{1}{t}dt = -\ln(\cos(u))$$

1.4 Quelques techniques classiques de calcul d'intégrales

Nous ne savons pas calculer exactement (avec des primitives qui sont des fonctions classiques) la plupart des intégrales. Il existe cependant de nombreuses "recettes" ou règles pour choisir par exemple les changements de variable les plus efficaces. En voici quelques unes.

Remarque : Il existe maintenant des logiciels de calcul formel tels que Maple qui savent manipuler ces règles et calculer automatiquement de manière exacte de "nombreuses" intégrales.

1.4.1 Intégration de fractions rationnelles par décomposition en éléments simples

On considère 2 polynômes P et Q et une fonction f définie par $f(x) := P(x)/Q(x)$. La fonction f est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition ($\mathbb{R}$ privé des racines de Q). On suppose connue la décomposition en éléments simples de P/Q et on se ramène à l'intégration d'un polynôme plus des éléments de première espèce et de seconde espèce.

Les éléments de première espèce $(x-a)^{-k}$, $k \geq 1$

Ils ont pour primitive
Si $k = 1$:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln(|x-a|) + C$$

Si $k \geq 2$:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

Les éléments de seconde espèce $(ax+b)/(x^2+cx+d)^k$, $k \geq 1$

(avec $c^2 - 4d < 0$, pas de racine réelle).
Par changement de variable $u = (x+\alpha)/\beta$ (soit $x = \beta u - \alpha$) avec

$$x^2 + cx + d = (x+\alpha)^2 + \beta^2$$

on se ramène au calcul des intégrales

$$I_k = \int \frac{du}{(1+u^2)^k} \quad \text{et} \quad J_k = \int \frac{udu}{(1+u^2)^k}$$

Les I_k se calculent par récurrence tandis que J_k se calcule par changement de variable $v = u^2$ (en distinguant $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$)

$$J_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1+v)^k} = \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$$

et pour $k > 1$,

$$J_k = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-k)(V+1)^{k-1}} + C$$

Quelques exemples

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)\\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{xdx}{x^4+1} &= \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{1+u^2} \quad \text{en posant } u=x^2\\ &= \frac{1}{2}\left[\arctan u\right]_0^4.\end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = x^2$.

On considère maintenant l'intégrale

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$$

La décomposition en éléments simples

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+b_1}{1+x^2} + \frac{cx+c_1}{(1+x^2)^2}$$

vérifie $a = 1$, puis on obtient $b_1 = c_1 = 0$ et $b = c = -1$, en écrivant

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} - \frac{1}{x} = \frac{bx+b_1}{1+x^2} + \frac{cx+c_1}{(1+x^2)^2}$$

et en identifiant les termes. On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^{10} \frac{dx}{x(1+x^2)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}\\ &= \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}\right]_1^{10}.\end{aligned}$$

1.4.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Il faut "linéariser" lorsqu'on doit intégrer un produit ou une puissance de fonctions trigonométriques ou hyperboliques.

Calcul de $\int_0^\pi \cos(3x)\sin(2x)dx$

On utilise pour linéariser les formules classiques sur les produits (de fonctions trigonométriques ou hyperboliques). Ici

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

On a donc ici

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(3x)\sin(2x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\sin(5x) + \sin(-x)\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(5x)}{5} + \cos x\right]_0^\pi\\ &= -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

Calcul de $\int_0^\pi \sin^4(x)dx$

On a

$$\begin{aligned}(\sin x)^4 &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{i4x}-4e^{i2x}+6e^0-4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^\pi \sin^4(x)dx = \frac{1}{16}\left[\frac{2\sin(4x)}{4}-\frac{8\sin(2x)}{2}+6x\right]_0^\pi$$

Pour le calcul de fractions rationnelles de fonctions trigonométriques, une méthode générale (ce n'est pas forcément la plus rapide) consiste à poser $t=\tan(x/2)$ (sur des intervalles $](2k-1)\pi,(2k+1)\pi[$). On a alors

$$dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x/2)\right)dx \quad \text{soit} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

et

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

On est donc ramené à calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle polynômiale. Il faut faire attention aux intervalles de définition.

Par exemple,

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{2\sin x - \sin^3 x}dx$$

en posant $t=\tan(x/2)$, (t varie dans $[\pi/6,\pi/4]$) on obtient que ($\tan(\pi/6)=1/\sqrt{3}$ et $\tan(\pi/4)=1$)

$$I = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{(1-t^2)/(1+t^2)}{4t/(1+t^2)-(2t/(1+t^2))^3}\frac{2dt}{1+t^2}$$

Il est ensuite possible de calculer cette intégrale en utilisant la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Le sujet est long et on ne le développera pas.